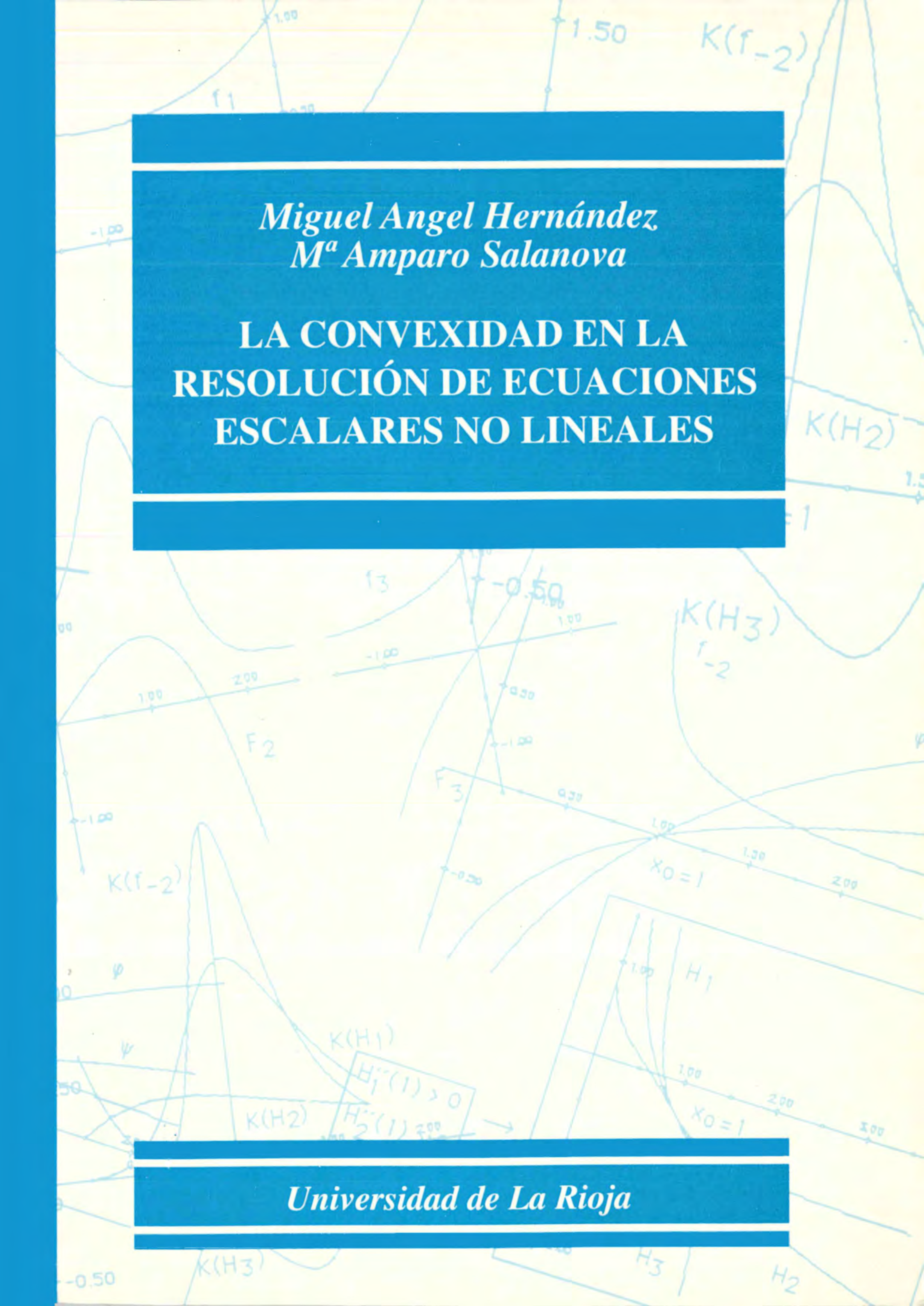


Miguel Angel Hernández
Mª Amparo Salanova

LA CONVEXIDAD EN LA RESOLUCIÓN DE ECUACIONES ESCALARES NO LINEALES

Universidad de La Rioja

LA CONVEXIDAD EN LA RESOLUCION DE ECUACIONES ESCALARES NO LINEALES

MATERIAL DIDÁCTICO

Matemáticas

nº 2

Miguel Angel Hernández • Mª Amparo Salanova
Profesores del Departamento de Matemáticas y Computación
de la Universidad de La Rioja

LA CONVEXIDAD EN LA RESOLUCIÓN DE ECUACIONES ESCALARES NO LINEALES

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

Servicio de Publicaciones



publicaciones.unirioja.es
E-mail: publicaciones@unirioja.es

ISBN: 978-84-694-0873-5

A mis queridos padres.
(Miguel Angel)

PRÓLOGO

Este trabajo ha surgido como consecuencia de explicar durante varios años el tema relativo al estudio de los métodos numéricos para la resolución de ecuaciones escalares no lineales, así como de una primera idea que apareció en el desarrollo de dicho tema, la cual consiste en relacionar la variación de la convexidad de la curva $y = f(x)$ con la velocidad de convergencia que un proceso iterativo tiene al aproximar una raíz de la ecuación $f(x)=0$.

A partir de esta primera idea, y junto a la Dra. M. A. Salanova, comenzamos a realizar algunos trabajos de investigación sobre las ecuaciones escalares no lineales como paso previo al estudio de la resolución de operadores no lineales en espacios de Banach, que era nuestro principal objetivo. Es como resultado de esta investigación previa que hemos elaborado estas notas.

Finalmente queremos expresar nuestro agradecimiento a nuestros compañeros de la Universidad de La Rioja que a lo largo de estos años nos prestaron su inestimable ayuda. En particular, queremos agradecer a los profesores J. A. Ezquerro y J. M. Gutiérrez sus observaciones e indicaciones en la correción y mejora de estas notas.

Logroño, Febrero de 1996.

Miguel Ángel.

ÍNDICE

TEMA I. ÍNDICES DE MEDIDA DE LA CONCAVIDAD Y CONVEXIDAD DE UNA CURVA

TEMA II. LA CONCAVIDAD Y CONVEXIDAD EN LA CONVERGENCIA DE PROCESOS ITERATIVOS

Tema I

Índices de Medida de la Concavidad y la Convexidad de una Curva

INTRODUCCIÓN

El estudio de la concavidad y convexidad de un curva es un antiguo problema resuelto por los matemáticos. Está perfectamente caracterizado el hecho de que una curva sea cóncava o convexa. Sin embargo el problema de medir esta concavidad o convexidad es una cuestión menos desarrollada. Son conocidos los grados de convexidad de una curva obtenidos por JENSEN y POPOVICIU [3]; no obstante dichos grados de convexidad tienen un eminente sentido teórico. Su aplicación práctica resulta excesivamente complicada pues, entre otras cosas, conlleva la consideración de particiones de un intervalo según diferentes medidas, ya que estos grados de convexidad son globales sobre dicho intervalo.

Otra forma de medir la convexidad de una curva se sugiere en el Teorema de BOHR-MOLLERUP [2], para la definición de la función Gamma. En este resultado aparece el concepto de función logarítmicamente convexa [19], es decir, una función cuyo logaritmo es una función convexa. J. GARAY y M. A. HERNANDEZ [6], introducen el grado de convexidad logarítmico. Mediante la sucesiva aplicación del operador logarítmo, operador que "concaviza" a una función convexa, se obtiene una medida puntual de la convexidad, dada por la resistencia de esta función a dicho operador. Es decir, el número de veces que hay que aplicar el operador logaritmo a la función para obtener como resultado una función cóncava nos da una medida puntual de la convexidad de la función que nos permite definir el grado de convexidad logarítmico, cuyo estudio se desarrolla en el primer tema.

A continuación, en el segundo tema, apoyándonos en la interpretación geométrica del grado de convexidad logarítmico definimos el correspondiente grado de concavidad exponencial para una función cóncava.

Terminamos nuestro estudio de la concavidad y convexidad de una curva extendiendo estos conceptos para operadores φ cualesquiera, definimos así el φ -grado de convexidad y el φ -grado de concavidad de una función convexa y cóncava respectivamente.

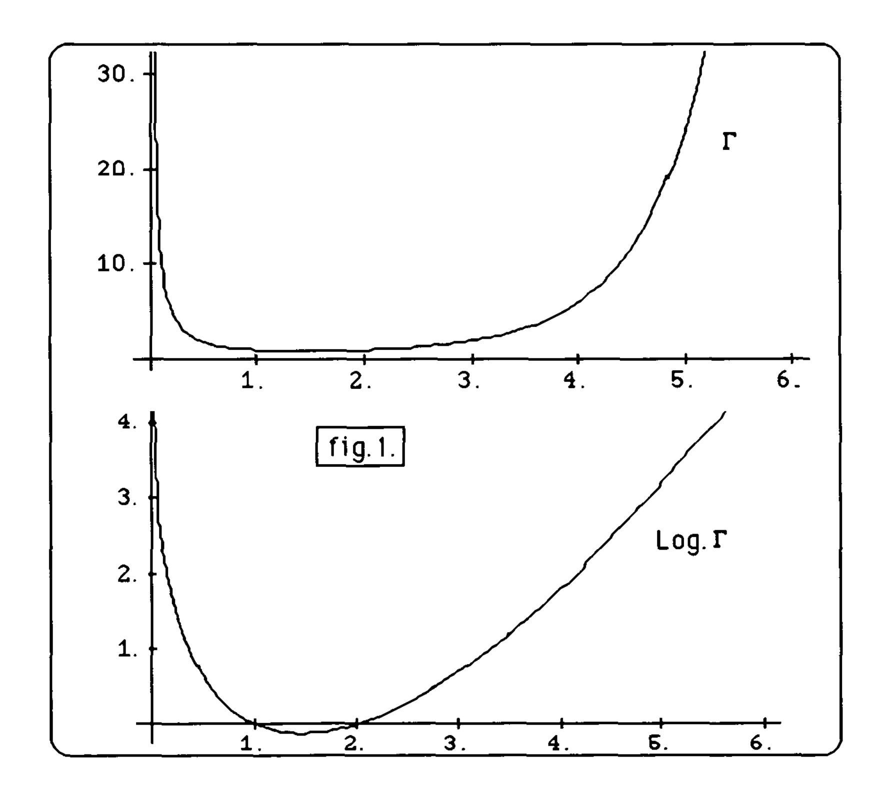
En este estudio consideraremos que una función f: (a,b) $\rightarrow$ R se denomina convexa si se verifica que $f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$ para todo $x,y \in (a,b)$ y $\lambda \in (0,1)$. Se dirá estrictamente convexa si la desigualdad anterior es estricta para todo $x \neq y$ en (a,b). Ahora bien, dado que en nuestro estudio consideraremos en todo momento funciones $f \in C^{(p}((a,b))$, $p \geq 2$, es conocido [19] que en esta situación f es convexa sí y sólo sí $f''(x) \geq 0$. Y si $f''(x) > 0$ en (a,b) entonces se verifica el mismo resultado para f estrictamente convexa. A partir de esta caracterización, dado que en nuestro estudio intentamos definir una medida puntual de la convexidad de una función consideraremos la convexidad de forma puntual. Dado el caracter local que tiene la convexidad, es difícil establecer una definición de función convexa en un punto. Teniendo en cuenta la restricción que ello supone, nosotros consideraremos, para nuestro estudio, puntos x_0 donde la función sea convexa verificando que $f''(x_0)>0$, en cuyo caso diremos que f es de carácter estrictamente convexo en x_0, o bien puntos x_0 tales que existe $k \in N$, número par, con $k \leq p$, tal que $f''(x_0) = \ldots = f^{(k-1}(x_0) = 0$ y $f^{(k}(x_0) > 0$. En esta situación diremos que f es de carácter convexo en sentido no estricto en x_0. Cualquier otra situación de convexidad en un punto x_0 queda fuera de nuestro estudio. Notemos que la función x^4 es convexa en sentido estricto en el punto $x_0=0$, sin embargo según nuestra consideración es de carácter no estricto en dicho punto. En el caso de la concavidad consideramos la situación análoga. Este mismo criterio lo seguiremos con los puntos críticos.

CAPÍTULO I

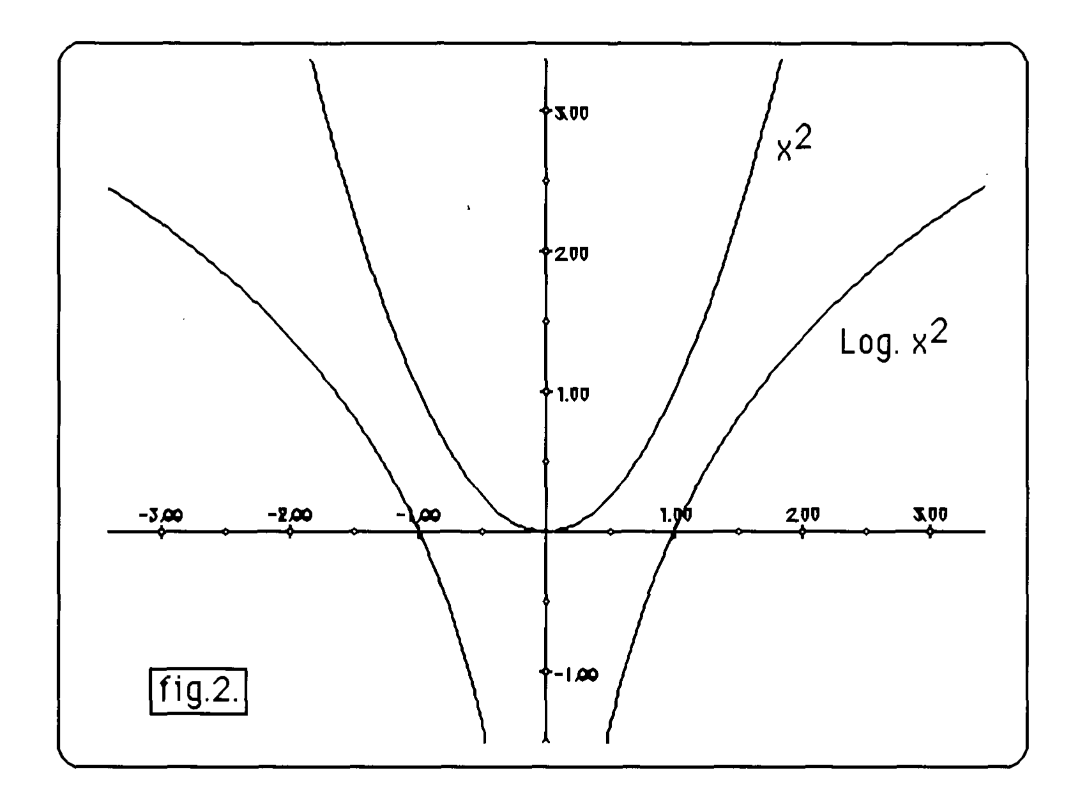
MEDIDA DE LA CONVEXIDAD DE UNA CURVA MEDIANTE EL OPERADOR LOGARÍTMO

1.0. Introducción

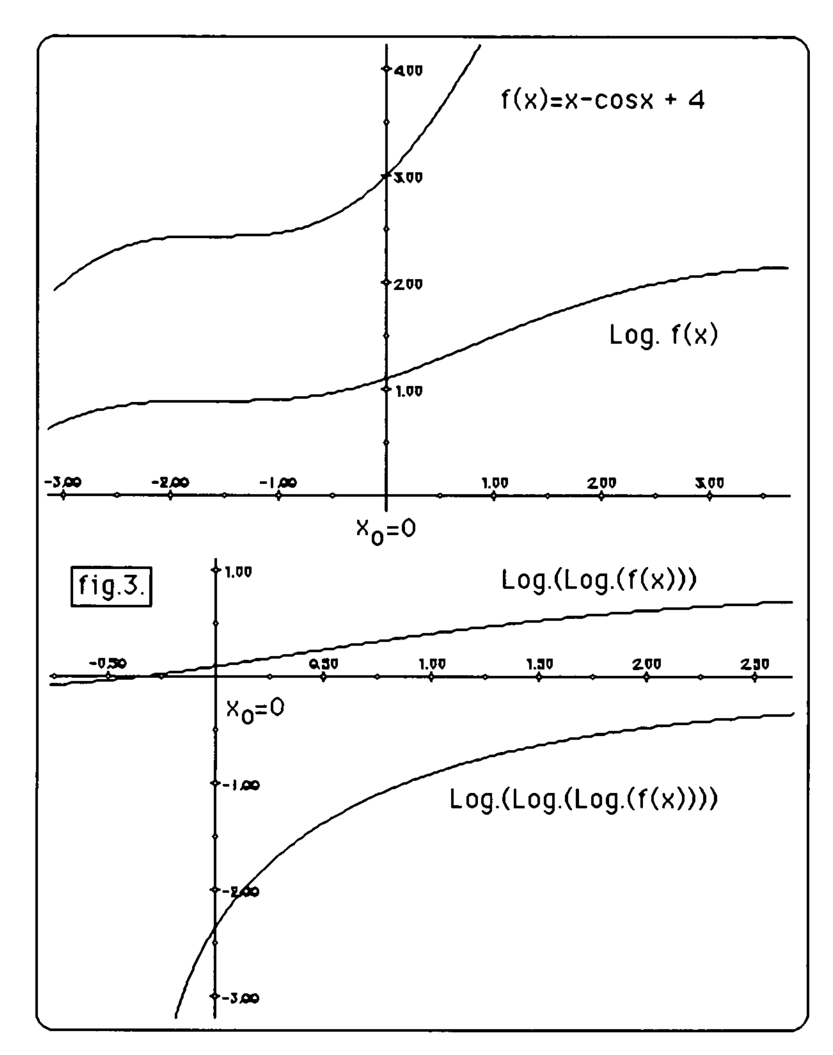
El Teorema de BOHR-MOLLERUP, relativo a la definición de la función gamma [2], utiliza el hecho de que dicha función es "logarítmicamente convexa" en R+, es decir, su logaritmo es una función convexa. (fig.1.)



Resulta sencillo observar que esta propiedad no es verificada por todas las funciones convexas. Basta considerar, por ejemplo, la función x^2. (fig.2.)



Esta situación nos lleva a pensar que, en cierto sentido, existen funciones "más convexas" que otras. De hecho, lo que estamos considerando es la acción del operador logaritmo sobre el conjunto de las funciones convexas. Acción que, por ser el logaritmo una función cóncava, "concaviza" las funciones a las que se les aplica. En este capítulo vamos a obtener un índice de medida puntual de la convexidad de una función. Para lograr esto, mediremos la resistencia que ofrece una función convexa a dejar de serlo mediante sucesivas aplicaciones del operador logaritmo, es decir, calcularemos el número de veces que debemos aplicar dicho operador a la función convexa considerada, para que el resultado deje de ser una función convexa.



La figura 3 muestra que hemos de aplicar tres veces el operador logaritmo para que la función f(x) = x - cos x + 4, que es convexa en $x_0 = 0$, deje de serlo.

Este número nos proporcionará un índice de medida, en cada punto, de la convexidad de la función considerada.

Notemos por otra parte que si consideramos una función f en las condiciones indicadas, normalizada por $f(x_0) = 1$ para simplificar nuestros cálculos, entonces tenemos que la curvatura de f es mayor que la del log f (fig.4.), ya que

$$\frac{d}{dx}[\log f(x)]_{x=x_0} = f'(x_0) \quad y \quad \frac{d^2}{dx^2}[\log f(x)]_{x=x_0} = f''(x_0) - f'(x_0)^2 ,$$

y las curvaturas de f(x) y de log f(x) en el punto x_0 vienen dadas por

$$[K(f(x))]_{x=x_0} = \frac{f''(x_0)}{(1+f'(x_0))^{3/2}}, \qquad [K(\log f(x))]_{x=x_0} = \frac{f''(x_0) - f'(x_0)^2}{(1+f'(x_0))^{3/2}}$$

luego parece claro que se verifica nuestra idea geométrica de construcción de éste índice de convexidad.

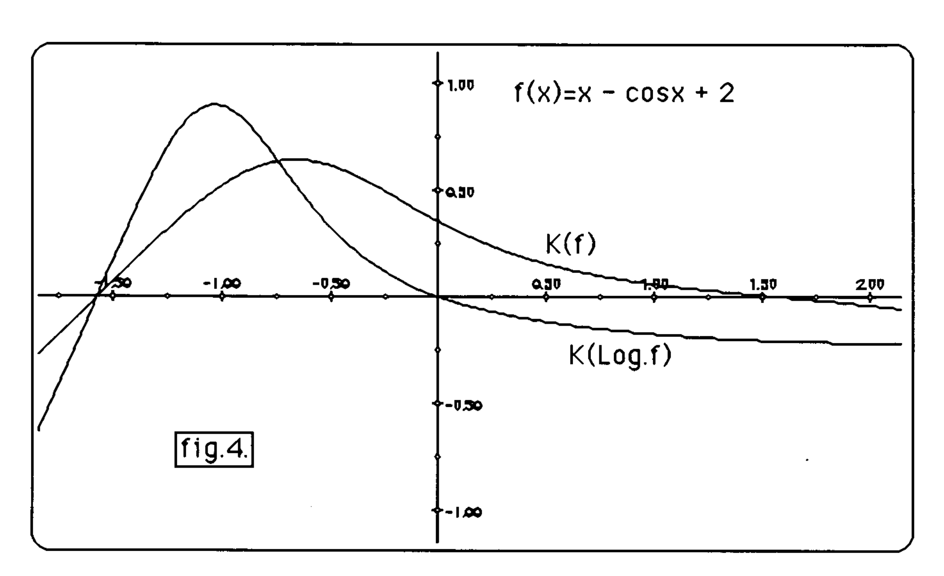


fig.4.

1.1. Funciones logarítmicamente convexas.

Comenzamos nuestro estudio analizando el concepto de función logarítmicamente convexa introducido por BOHR -MOLLERUP. Este análisis tiene como objetivo el de conseguir una expresión analítica que caracterice, de alguna manera, dicho concepto.

Sea V un entorno del punto x_0 y f una función derivable, al menos de orden dos ($f \in C^{(m}(V)$ con $m \geq 2$), positiva y convexa en V. Sabemos que f es una función logarítmicamente convexa en x_0 si log f es una función convexa en x_0. Entonces, si f es una función logarítmicamente convexa en x_0, existe un entorno W de x_0 y una función $h \in C^{(m}(W)$ convexa, $W \subset V$, de manera que $f(x) = \exp [h(x)]$ en W, es decir, $h(x) = \log f(x)$ en W. Operando con la expresión obtenida para la función f se sigue que

$f'(x) = h'(x) \exp [h(x)] = h'(x) f(x)$

$f''(x) = h''(x) f(x) + h'(x) f'(x) = [h''(x) + h'(x)^2] f(x)$

y de estas igualdades se obtiene

$$(1.1) \qquad h''(x) = \frac{f(x)f''(x) - [f'(x)]^2}{[f(x)]^2}$$

igualdad que nos va a permitir realizar el estudio de la convexidad de la función h y por tanto de log f, al menos en el caso de que esta convexidad sea en sentido estricto.

A partir de (1.1), considerando su valor en el punto x_0 y los diferentes tipos de convexidad que se pueden presentar en él, obtenemos los siguientes resultados, diferenciando el caso de que x_0 sea un punto crítico.

Teorema 1.1.

Sea x_0 un punto no crítico de f

(i) Si f es una función convexa en sentido estricto se verifica

(a) f es logarítmicamente convexa en x_0 en sentido estricto, es decir, log f es estrictamente convexa en x_0 sí y sólo sí

$$\frac{f(x_0)f''(x_0)}{[f'(x_0)]^2} > 1 .$$

(b) f es logarítmicamente convexa en x_0 en sentido no estricto, sí y sólo sí existe $k \in N$, número par, $k \leq m$, de manera que

$$(1.2)\quad \frac{[f(x_0)]^{t-1} f^{(t}(x_0)}{[f'(x_0)]^t} = 1 \qquad 2 \leq t \leq k-1 \qquad y \qquad \frac{f^{(k}(x_0) f(x_0)^{k-1}}{[f'(x_0)]^k} > 1$$

(ii) Si f es una función convexa en sentido no estricto entonces f no es logarítmicamente convexa en x_0.

Demostración:

En cuanto al apartado (i), por (1.1) el punto (a) resulta obvio. Por otra parte, para probar (b), como h =log f es convexa en x_0, pero en sentido no estricto, se verifica que existe $k \in N$, número par, de manera que $h''(x_0) = ... = h^{(k-1}(x_0) = 0$ y $h^{(k}(x_0) > 0$, luego teniendo en cuenta (1.1) se obtiene que $f(x_0)f''(x_0) = [f'(x_0)]^2$.

Para probar (1.2) consideramos que $f'(x_0) = h'(x_0)\, f(x_0)$ y por tanto se verifica

$$(1.3)\qquad f^{(n+1}(x_0) = \sum_{t=0}^{n} \binom{n}{t} h^{(t+1}(x_0) f^{(n-t}(x_0)$$

entonces

$n = 0 \qquad f'(x_0) = h'(x_0)\, f(x_0)$

$n = 1 \qquad f''(x_0) = h'(x_0) f'(x_0) + h''(x_0) f(x_0) \Rightarrow f''(x_0) = \dfrac{f'(x_0)^2}{f(x_0)}$

$n = 2 \qquad f'''(x_0) = h'(x_0) f''(x_0) + \binom{2}{1} h''(x_0) f'(x_0) + h'''(x_0) f(x_0) \Rightarrow$

$$\Rightarrow f'''(x_0) = \frac{f'(x_0)^3}{f(x_0)^2}$$

Suponiendo que $f^{(k-2}(x_0) = \dfrac{f'(x_0)^{k-2}}{f(x_0)^{k-3}}$ por recurrencia se tiene

$n = k-2 \qquad f^{(k-1}(x_0) = \sum_{t=0}^{k-2} \binom{k-2}{t} h^{(t+1}(x_0) f^{(k-2-t}(x_0) = h'(x_0) f^{(k-2}(x_0) \Rightarrow$

$$\Rightarrow f^{(k-1}(x_0) = \frac{f'(x_0)^{k-1}}{f(x_0)^{k-2}}$$

Por otra parte, si consideramos

$$n = k-1 \qquad f^{(k}(x_o) = \sum_{t=0}^{k-1} \binom{k-1}{t} h^{(t+1}(x_o) f^{(k-1-t}(x_o) = h'(x_o) f^{(k-1}(x_o) + h^{(k}(x_o)$$

$$\Rightarrow \quad f^{(k}(x_o) = \frac{f'(x_o)^k}{f(x_o)^{k-1}} + h^{(k}(x_o) f(x_o) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f^{(k}(x_o)\, f(x_o)^{k-1} - f'(x_o)^k = h^{(k}(x_o)\, f(x_o)^k.$$

Como k es par, $f(x_o) > 0$ y $h^{(k}(x_o) > 0$ entonces se sigue que $f^{(k}(x_o)\, f(x_o)^{k-1} > f'(x_o)^k$.

Para ver que las condiciones también son suficientes, basta despejar $h^{(t}(x_o)$ en cada una de las igualdades anteriores y se comprueba fácilmente que h es convexa en sentido no estricto.

Para el apartado (ii), se deduce de la expresión (1.1) que $h''(x_o) \leq 0$. Por tanto $h(x) = \log f$ no es convexa y por tanto f no es logarítmicamente convexa #

Notemos que la condición (b) del apartado (i) para t = 2, no es suficiente para que f sea logarítmicamente convexa en x_o en sentido no estricto, ya que si $f(x_o)\, f''(x_o)[f'(x_o)]^{-2} = 1$, no podemos asegurar que la función h=log f sea convexa (fig.5.)

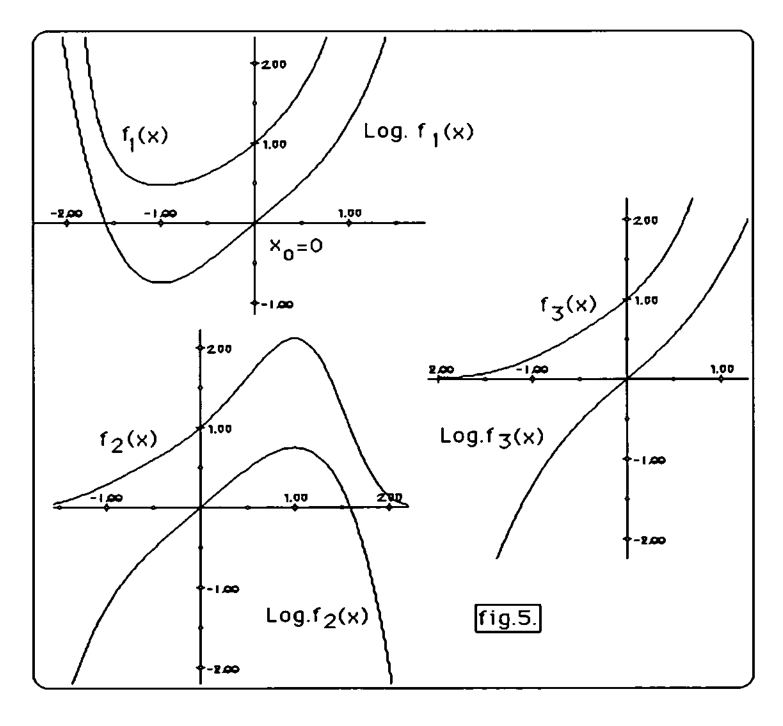


fig.5.

A continuación indicamos unos ejemplos que corroboran este hecho.

Ejemplo 1.1.

Sean las funciones

$f_1(x) = \exp [x + x^4/4]$

$f_2(x) = \exp [x - x^4/4]$

$f_3(x) = \exp [x + x^3/3]$ (fig.5.)

verifican que $f_i(0)f''_i(0) = f'_i(0)^2$ $i = 1,2,3$, sin embargo $h_1 = \log f_1$ es convexa en el origen, $h_2 = \log f_2$ es cóncava y $h_3 = \log f_3$ tiene un punto de inflexión. Esto prueba la indeterminación que presenta esta situación.

Teorema 1.2.

Si x_0 es un punto crítico de f, es decir en nuestras condiciones un mínimo, entonces se verifica

$$(1.4) \qquad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} = +\infty$$

Además x_0 será un mínimo de $h = \log f$, manteniéndose para h el carácter estricto o no estricto que x_0 tenga para f.

Demostración:

Para probarlo es necesario distinguir dos situaciones posibles. A parte de verificarse que $f'(x_0) = 0$, puede ocurrir que

1) $f''(x_0) > 0$

2) Exista $k \in N$, número par, $k \leq m$, de manera que

$f''(x_0) = \dots = f^{(k-1}(x_0) = 0$ y $f^{(k}(x_0) > 0$.

En el caso 1.) resulta obvio que, como $f(x_0) > 0$ y $f''(x_0) > 0$, se verifica (1.4). Además, teniendo en cuenta (1.1), se tiene que $h''(x_0) > 0$, siendo $h'(x_0) = 0$, luego se mantiene el carácter estricto del mínimo x_0 de f para la función $h = \log f$.

En cuanto a 2.), aplicando la regla de L´Hôpital [20], se prueba que también verifica (1.4). Y considerando la expresión (1.3) se obtiene que $h'(x_0) = h''(x_0) = \dots = h^{(k-1}(x_0) = 0$ y $h^{(k}(x_0) > 0$. #

Pueden estudiarse algunas propiedades interesantes de las funciones logarítmicamente convexas en el libro de Roberts [19].

1.2. Definición del grado de convexidad logarítmico de una función

En este párrafo vamos a establecer un índice de convexidad de una función. Para ello, como ya indicamos en la introducción de este tema, vamos a considerar el operador logaritmo. Entonces, reiterando el procedimento utilizado al considerar funciones logarítmicamente convexas visto en el párrafo anterior, es decir la aplicación del operador logaritmo, vamos a obtener un número que nos va a permitir establecer ese índice puntual de la convexidad que indicábamos anteriormente.

Si V es un entorno del punto x_0, consideraremos en todo momento $f \in C^{(m}(V)$ con $m \geq 2$, una función convexa en x_0. Además, para obtener una simplificación en los cálculos, supondremos $f(x_0) = 1$, posteriormente indicaremos qué hacer en otra situación.

Por otra parte, si denotamos

$$C^{(m}_{(x_0,r)}(V) = \{ g \in C^{(m}(V) \mid g(x_0) = r \}$$

y consideramos el operador normalización a uno en el punto x_0, dado por

$$N : C^{(m}_{(x_0,0)}(V) \to C^{(m}_{(x_0,1)}(V) \quad \text{tal que} \quad N[g](x) = g(x) + 1 .$$

Entonces definimos las siguientes sucesiones de funciones

$$\begin{array}{ll} F_1(x) = \log f(x) & G_1(x) = N[F_1](x) \\ F_2(x) = \log G_1(x) & G_2(x) = N[F_2](x) \\ \text{-----------------} & \text{-----------------} \\ F_n(x) = \log G_{n-1}(x) & G_n(x) = N[F_n](x) \end{array}$$

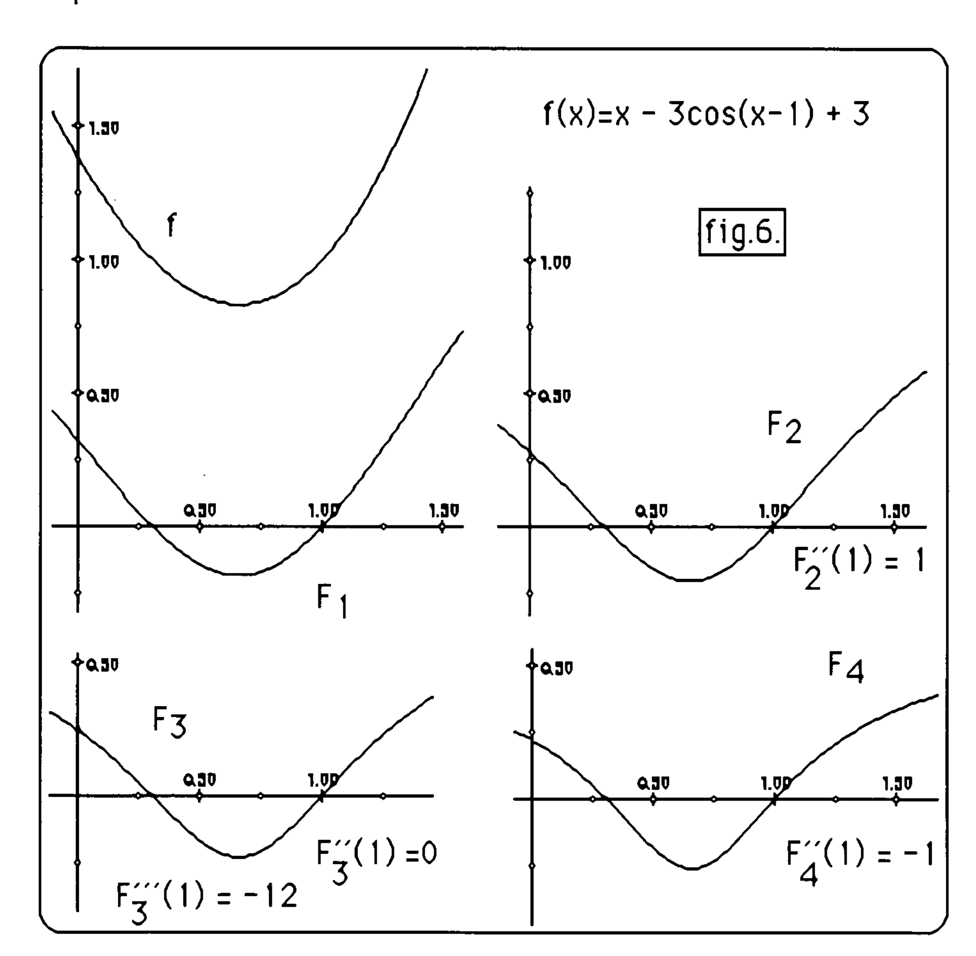
Así, el estudio de la convexidad en el punto x_0, de las funciones que forman la sucesión

$$\{F_n\}_{n \geq 1} \subset C^{(m}_{(x_0\,,\,0)}(V) \,,$$

nos va a permitir medir la resistencia de la función f a ser "concavizada" , mediante sucesivas aplicaciones del operador logaritmo.

En la figura 6 pueden verse las gráficas de la sucesión $\{F_n\}$ para la función $f(x) = x - 3\cos(x-1) + 3$. Vemos que F_2 es todavía una función convexa en $x_0 = 1$, F_3 tiene en x_0 un punto de inflexión y F_4 es cóncava en x_0.

Este índice de la convexidad va a establecer lo que denominaremos grado de convexidad logarítmico de f en x_0 , grado que nos va a indicar cómo es la convexidad de f en el punto x_0 . Para conseguir esto, comenzaremos introduciendo el concepto de función "n-logarítmicamente convexa", concepto que se obtiene como generalización del término de función logarítmicamente convexa estudiado en el párrafo anterior.



Definición 1.3.

Diremos que f es n - logarítmicamente convexa en x_0 si F_n es convexa en x_0.

Si f es n - logarítmicamente convexa en x_0 para todo $n \in \mathbb{N}$ diremos que f es infinitamente -logarítmico convexa en x_0.

A continuación, al igual que hicimos en el párrafo anterior, nos interesa caracterizar analíticamente este concepto. Para ello, comenzaremos obteniendo una expresión para la segunda derivada de las funciones de la sucesión $\{F_n\}_{n\geq 1}$, derivada que, en algunas ocasiones (carácter estricto), nos permitirá estudiar su convexidad.

Teorema 1.4.

Para todo $n \in N$ se verifica:

(1.5) $F'_n(x_o) = f'(x_o)$

(1.6) $F''_n(x_o) = f''(x_o) - n\,[f'(x_o)]^2$

Demostración:

Vamos a probar ambas expresiones por inducción. Dado que (1.5) nos servirá para probar (1.6) , demostraremos en primer lugar la expresión correspondiente a la primera derivada de F_n. Es obvio que (1.5) se verifica para n = 1, así que supongamos que se verifica para todo $p \in N$ con $p < n$, es decir $F'_p(x_o) = f'(x_o)$. Como $F_n(x) = \log G_{n-1}(x)$ se sigue que $F'_n(x_o) = G'_{n-1}(x_o)$ puesto que

$$G_{n-1} \in C^{(m}_{(x_0\,,\,1)}(V).$$

Por la construcción indicada de las sucesiones $\{F_n\}_{n\geq 1}$ y $\{G_n\}_{n\geq 1}$, es claro que $G'_{n-1}(x_o) = F'_{n-1}(x_o)$ y aplicando la hipótesis de inducción obtenemos que $F'_n(x_o)=G'_{n-1}(x_o) = f'(x_o)$, con lo que (1.5) queda probado .

En cuanto a (1.6) , como $F_1(x) = \log f(x)$, teniendo en cuenta (1.1) , se sigue que $F''_1(x_o) = f''(x_o) - [f'(x_o)]^2$, luego (1.6) se verifica para n = 1. Supongamos que para todo $p \in N$ con $p < n$ se tiene que $F''_p(x_o) = f''(x_o) - p[\, f'(x_o)\,]^2$. Entonces, como $F_n(x) = \log G_{n-1}(x) = \log [F_{n-1}(x) + 1]$, es claro que

$$F'_n(x) = \frac{F'_{n-1}(x)}{F_{n-1}(x) + 1} \quad \text{y} \quad F''_n(x) = \frac{F''_{n-1}(x)[F_{n-1}(x) + 1] - F'_{n-1}(x)]^2}{[F_{n-1}(x) + 1]^2}$$

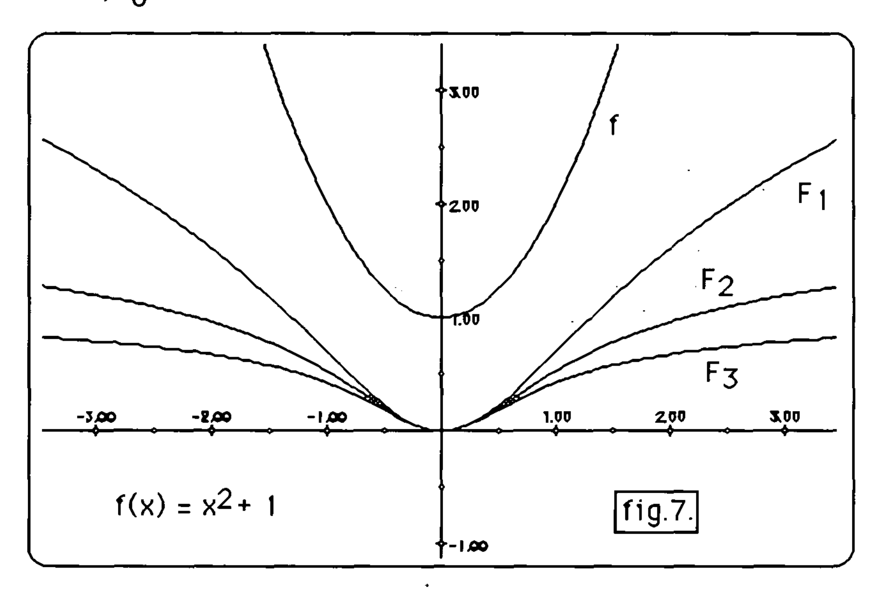
luego mediante (1.5) y la hipótesis de inducción , como se verifica

$$F_{n-1} \in C^{(m}_{(x_o,o)}(V), \quad \text{obtenemos que} \quad F''_n(x_o) = f''(x_o) - n\,[\,f'(x_o)\,]^2,$$

lo que prueba (1.6).

Notemos que si f es n-logarítmicamente convexa en x_0 entonces f es k-logarítmicamente convexa en x_0 para $k \in N$ con $1 \leq k \leq n$.

A continuación, teniendo en cuenta los diferentes tipos de convexidad que pueden presentarse en el punto x_0, vamos a caracterizar analíticamente el concepto de función n-logarítmicamente convexa en x_0. Así, comenzaremos analizando el caso de que x_0 sea un punto crítico de f, es decir, en nuestras condiciones, x_0 será un mínimo.



Teorema 1.5.

(i) Si x_0 es un mínimo de f entonces también lo es de F_n para todo $n \in N$. Además el carácter del mínimo es el mismo en f que en cualquiera de las F_n, $n \in N$.
(ii) f es infinítamente-logarítmico convexa en x_0 sí y sólo sí x_0 es un mínimo de f.

Demostración:

(i) Supongamos que x_0 es un mínimo estricto de f, es decir, $f'(x_0)=0$ y $f''(x_0) > 0$. Por (1.5) y (1.6) se sigue que $F'_n(x_0)=0$ y $F''_n(x_0) > 0$ para cualquier $n \in N$, por tanto x_0 es un mínimo estricto de F_n para todo $n \in N$.

Si x_0 es un mínimo no estricto de f, es decir, existe $k \in N$ número par, tal que $f'(x_0) =... = f^{(k-1}(x_0) = 0$ y $f^{(k}(x_0) > 0$, veamos que también lo es de cualquier F_n. Por (1.3), considerando $F_1(x) = \log f(x)$, obtenemos que

$$f^{(n+1}(x_o) = \sum_{t=o}^{n} \binom{n}{t} F_1^{(t+1}(x_o) f^{(n-t}(x_o).$$

Entonces aplicando recurrencia a esta expresión obtenemos

n=0 $f'(xo) = F'_1(x_o)\, f(x_o) \Rightarrow F'_1(x_o) = 0$

n=1 $f''(x_o) = F'_1(x_o)\, f'(xo) + F''_1(x_o)\, f(x_o) \Rightarrow F''_1(x_o) = 0$

Suponiendo que $F_1^{(r}(x_0) = 0$ para $r \leq k-2$ tenemos que para

$$n = k-2 \qquad f^{(k-1}(x_o) = \sum_{t=o}^{k-2} \binom{k-2}{t} F_1^{(t+1}(x_o) f^{(k-2-t}(x_o) = F_1^{(k-1}(x_o) f(x_o)$$

$$\Rightarrow F_1^{(k-1}(x_o) = 0$$

Por otra parte, si consideramos

$$n = k-1 \qquad f^{(k}(x_o) = \sum_{t=o}^{k-2} \binom{k-1}{t} F_1^{(t+1}(x_o) f^{(k-1-t}(x_o) = F_1^{(k}(x_o) f(x_o) = F_1^{(k}(x_o)$$

luego $F'_1(x_o) = ... = F_1^{(k-1}(xo) = 0$ y $F_1^{(k}(xo) = f^{(k}(xo) > 0$. Por tanto F_1 tiene un mínimo no estricto en x_o.

Supongamos, como hipótesis de inducción, que x_o es un mínimo no estricto de $F_1,...,F_{n-1}$. Entonces como $F_n(x) = \log G_{n-1}(x)$, por (1.3) se verifica que

$$G_{n-1}^{(s+1}(x_o) = \sum_{t=o}^{s} \binom{s}{t} F_n^{(t+1}(x_o) G_{n-1}^{(s-t}(x_o)$$

teniendo en cuenta que $G_{n-1}(x) = F_{n-1}(x) + 1$ y que $G_{n-1}(x_o) = 1$ se sigue

$$F_{n-1}^{(s+1}(x_o) = F_n^{(s+1}(x_o) + \sum_{t=o}^{s-1} \binom{s}{t} F_n^{(t+1}(x_o) F_{n-1}^{(s-t}(x_o)$$

y procediendo como en el caso n = 1, aplicando que x_o es un mínimo no estricto de Fn-1, se obtiene que x_o es un mínimo no estricto de F_n, para $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Si x_o es un mínimo de f, por (i), x_o es un mínimo de F_n para cualquier $n \in \mathbb{N}$, entonces F_n es convexa en x_o para todo $n \in \mathbb{N}$ y por tanto f es infinitamente-logarítmico convexa en x_o.

Recíprocamente, si f es infinitamente-logarítmico convexa en x_0 entonces F_n es convexa en x_0 para todo $n \in N$. De (1.6) se sigue que $f''(x_0) - n[f'(x_0)]^2 \geq 0$ para todo $n \in N$ y por (1.5) $f'(x_0) = F'_n(x_0) = 0$. Entonces se sigue que :

(a) $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0)>0$ ó bien

(b) $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$.

El caso (a) representa la situación de que x_0 sea un mínimo estricto de f. Respecto de (b), como f es convexa por hipótesis, se obtiene que x_0 es un mínimo no estricto de f. #

En la figura 7 puede verse un ejemplo del caso en que x_0 es un mínimo estricto de f.

Si x_0 no es un punto crítico de f, pueden presentarse dos situaciones: f estríctamente convexa en x_0 (fig.6.) ó bien f convexa en sentido no estricto en x_0 (fig.8.). A continuación analizamos estas dos situaciones. Denotaremos con E[r] la parte entera del número real r.

Teorema 1.6.

Sea f una función convexa en sentido estricto en el punto x_0. Entonces

(i) Si $r = f''(x_0)/[f'(x_0)]^2 \notin N$ entonces se verifica que

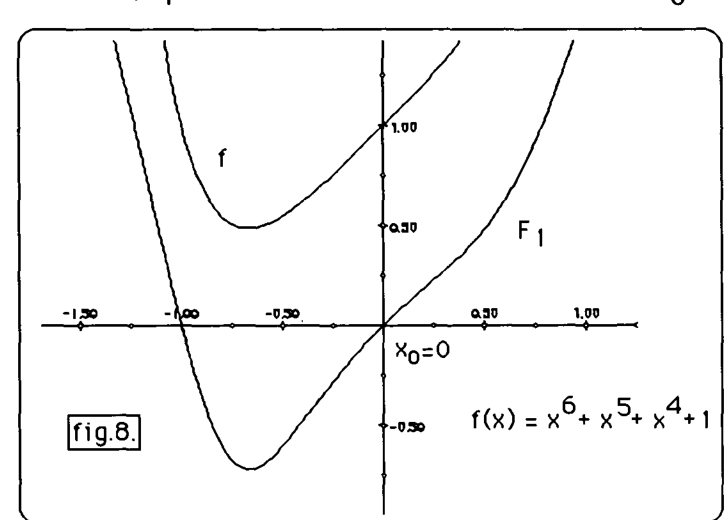
- (a) Para $p = E[r] \in N$, tenemos que F_p es estríctamente convexa en x_0 y F_{p+1} es estríctamente cóncava en x_0. Por tanto f es p-logarítmicamente convexa en x_0 y no es (p+1)- logarítmicamente convexa en x_0.
- (b) f es n-logarítmicamente convexa en x_0 para $n \leq E[r]$.

(ii) Si $r \in N$ se verifica:

- (a) f es (r-1) - logarítmicamente convexa en x_0, siendo F_{r-1} estríctamente convexa en x_0. Además F_{r+1} es estríctamente cóncava en x_0, luego f no es (r+1)- logarítmicamente convexa en x_0.
- (b) f es r-logarítmicamente convexa en x_0 sí y sólo si existe $k \in N$, número par, tal que

$$F_{r-1}^{(t}(x_0) = f'(x_0)^t \qquad 2 \leq t \leq k-1 \quad ; \quad F_{r-1}^{(k}(x_0) > f'(x_0)^k$$

En esta situación, F_r será convexa en sentido no estricto en x_0.



Demostración:

(i) El apartado (a) se sigue fácilmente de (1.6) , ya que si p = E[r], es claro que $f''(xo) > p[f'(x_0)]^2$ y $f''(x_0)<(p+1)[f'(x_0)]^2$. En cuanto a (b), también por (1.6), resulta obvio.

(ii) Al igual que en (i), por (1.6) el punto (a) es inmediato.

Para probar (b), tengamos en cuenta que $F_r(x) = \log G_{r-1}(x)$, entonces por (1.6) y como $G_{r-1}(x) = F_{r-1}(x) + 1$ se sigue que

$$(1.7) \qquad F_{r-1}^{(s+1}(x_0) = F_r^{(s+1}(x_0) + \sum_{t=0}^{s-1} \binom{s}{t} F_r^{(t+1}(x_0) \; F_{r-1}^{(s-t}(x_0)$$

Por otra parte, $F''_r(x_0) = f''(x_0) - r\,[\,f'(x_0)]^2 = 0$. Entonces f es r-logarítmicamente convexa en x_0 sí y sólo sí existe $k \in N$, número par, tal que $Fr'''(x_0) = \ldots = F_r^{(k-1}(x_0) = 0$ y $F_r^{(k}(x_0) > 0$, siendo $F'_r(x_0) = f'(x_0) \neq 0$. De donde resulta obvio que F_r es una función convexa, en sentido no estricto, en el punto x_0.

Además, por (1.7) tenemos que :

s=1 $\quad F''_{r-1}(x_0) = F'_r(x_0)\, F'_{r-1}(x_0) = [\,f'(x_0)]^2$

s=2 $\quad F'''_{r-1}(x_0) = F'_r(x_0)\, F''_{r-1}(x_0) + F''_r(x_0)\, F'_{r-1}(x_0) =$
$= F'_r(x_0)\, F''_{r-1}(xo) = [\,f'(x_0)]^3$

Por recurrencia, si suponemos $F_{r-1}^{(k-2}(x_0) = [f'(x_0)]^{k-2}$, tenemos que

$$s = k-2 \quad F_{r-1}^{(k-1}(x_0) = F_r^{(k-1}(x_0) + \sum_{t=0}^{k-3}\binom{k-2}{t}F_r^{(t+1}(x_0)F_{r-1}^{(k-2-t}(x_0) =$$

$$= \binom{k-2}{0}F'_r(x_0)F_{r-1}^{(k-2}(x_0) = f'(x_0)[f'(x_0)]^{k-2} = [f'(x_0)]^{k-1}.$$

Por otra parte, podemos escribir

$$s = k-1 \qquad F_{r-1}^{(k}(x_0) = F_r^{(k}(x_0) + \sum_{t=0}^{k-2}\binom{k-1}{t}F_r^{(t+1}(x_0)F_{r-1}^{(k-1-t}(x_0) =$$

$$= F_r^{(k}(x_0) + F'_r(x_0)F_{r-1}^{(k-1}(x_0) = F_r^{(k}(x_0) + [f'(x_0)]^k > [f'(x_0)]^k.$$

Y queda probado el apartado (b). #

Ejemplo 1.2.

El valor de $\frac{f_i''(0)}{f_i'(0)^2}$, $i = 1,2,3$, para las funciones

$$f_1(x) = \exp[\exp(\frac{x^4}{4} + x) - 1]$$

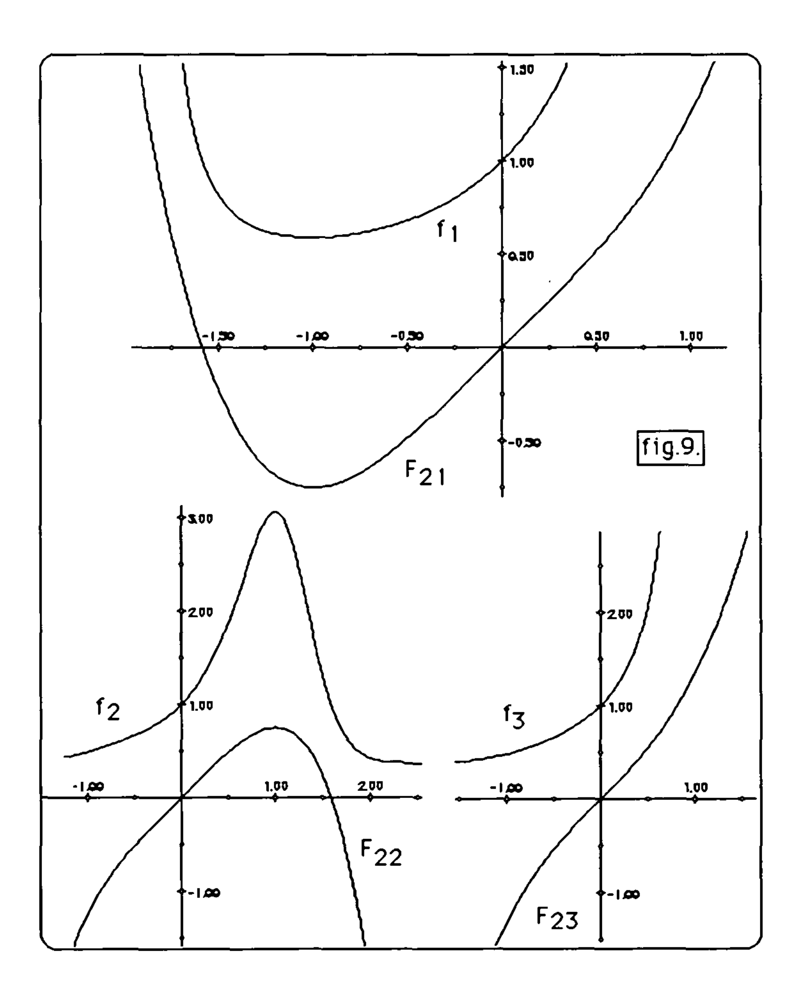
$$f_2(x) = \exp[\exp(x - \frac{x^4}{4}) - 1]$$

$$f_3(x) = \exp[\exp(\frac{x^3}{3} + x) - 1]$$

es dos. Si designamos por $\{F_{ni}\}$ la sucesión $\{F_n\}$ correspondiente a f_i, 1=1,2,3 se comprueba (fig.9.) que $F''_{21}(0)>0$, $F''_{22}(0) < 0$ y F_{23} tiene en el origen un punto de inflexión.

La situación que nos queda por analizar, que f sea una función convexa en sentido no estricto en x_0 (fig.8.), resulta evidente ya que en este caso sabemos que existe $k \in \mathbb{N}$, número par, de manera que $f''(x_0) = ... = f^{(k-1}(x_0) = 0$ y $f^{(k}(x_0) > 0$; como además $f'(x_0) \neq 0$, teniendo en cuenta (1.6) se sigue inmediatamente, que F_n es una función estrictamente cóncava en x_0 para cualquier $n \in \mathbb{N}$ (fig. 8).

Una vez estudiadas las diferentes posibilidades de convexidad que pueden presentarse en el punto x_0, resulta sencillo observar que estas quedan perfectamente determinadas analizando el valor de la expresión $f''(x_0)[f'(x_0)]^{-2}$, que por (1.6) nos permite estudiar la concavidad o convexidad de F_n en x_0 para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Este es el origen de la definición de "grado de convexidad logarítmico".



Definición 1.7.

El grado de convexidad logarítmico de la función f en el punto x_0 es el número real dado por la expresión

$$(1.8) \qquad \hat{L}_f(x_0) = \frac{f''(x_0)}{[f'(x_0)]^2}$$

cuando x_0 no es un mínimo de f, en cuyo caso $\hat{L}_f(x_0) = +\infty$.

Notemos que $\hat{L}_f : C^{(m}_{(x_0, 1)} \to \mathrm{R}$, y si consideramos funciones convexas, la imagen de $\hat{L}_f$ estaría en $[0, +\infty]$.

En el caso de que f tome un valor positivo arbitrario en el punto x_0, consideraremos la función $f^* = f/f(x_0)$ dado que log f y log f* poseen la "misma convexidad" en el punto x_0, ya que se diferencian en una constante (fig.10.). Entonces unos pequeños cálculos nos permiten obtener que el grado de convexidad logarítmico de f en x_0 es el número real dado por la expresión

$$(1.9) \qquad L_f(x_0) = \hat{L}_{f^*}(x_0) = \frac{f(x_0)f''(x_0)}{[f'(x_0)]^2}$$

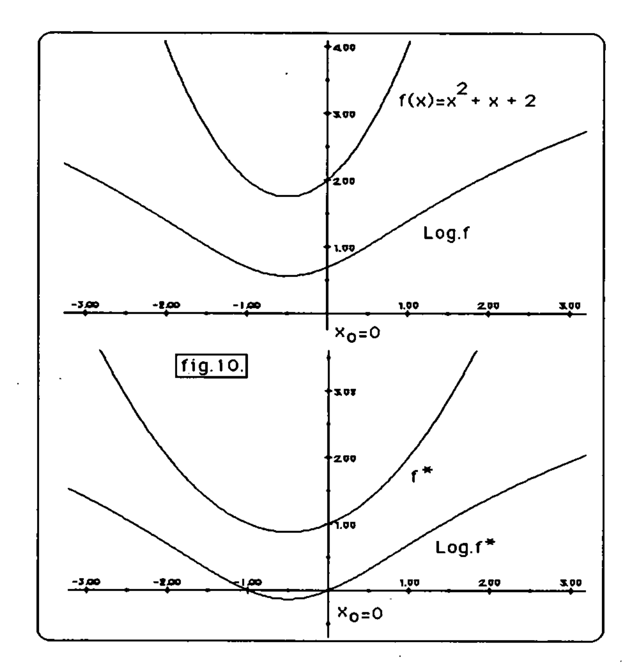
si x_0 no es un mínimo de f, en cuyo caso : $L_f(xo) = +\infty$.

Notas:

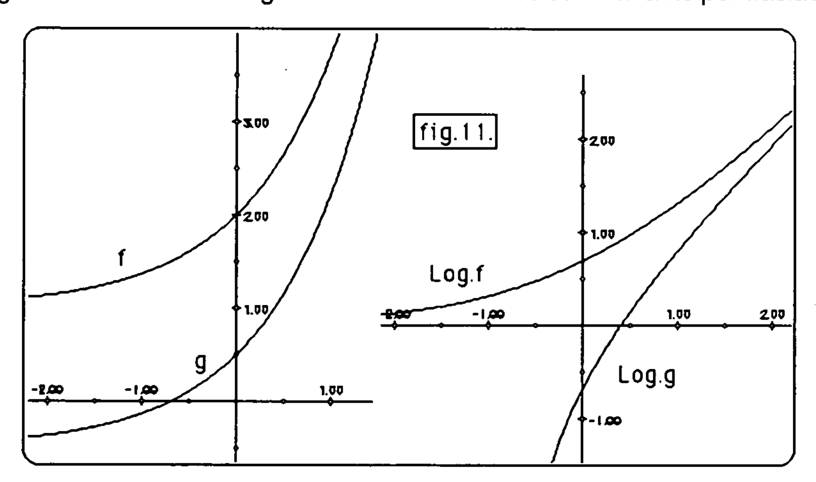
1. Si consideramos una función positiva en un entorno del punto x_0, es claro que el grado de convexidad logarítmico de una función convexa es un número real positivo, siendo "más convexa" respecto del logaritmo a medida que mayor sea dicho número. Por otra parte, si bien perdemos el significado geométrico del concepto, es claro que podemos extender formalmente la definición de L_f al conjunto $C^{(2}(V)$.

2. Es interesante notar que en el caso de que f no tome el valor uno en x_0, la normalización que hemos considerado no es la habitual, normalmente se considera $N(f)(x) = f(x) - f(x_0) + 1$. Esto se debe a que trasladar una función influye en la concavidad o convexidad de su logaritmo.

Así, por ejemplo, si tomamos $f(x) = \lambda + \exp(x)$, $x_0 = 0$ y $\lambda \in (-1, +\infty)$, al considerar $F(x) = \log f(x)$ obtenemos que



$sg(F''(x_0)) = sg\ (\lambda)$, de donde se sigue que si trasladamos la gráfica de la función exponencial de manera que tome un valor comprendido entre menos uno y cero en el origen, el logarítmo de esta función es una función cóncava ; siendo convexa el logarítmo de cualquier traslación de ella con $\lambda \in R+$. Por tanto, resulta evidente que el grado de convexidad logarítmico no es una medida invariante por traslaciones.



Como ejemplo, si consideramos $f(x) = exp(x) + 1$ y $g(x) = exp(x) - 1/2$, se observa que sus logarítmos poseen distinta convexidad en $x_0 = 0$. (fig. 11.)

1.3. Propiedades del grado de convexidad logarítmico.

En este apartado vamos a estudiar algunas propiedades del grado de convexidad logarítmico.

Teorema 1.8.

Sea $f \in C^{(2}(V)$, positiva y convexa en V. Entonces se verifica

i) Para todo número real r tal que $r + f(x_0) > 0$,

$$L_{(r+f)}(x_0) = L_f(x_0) + r\,\hat{L}_f(x_0)$$

ii) Para todo número real positivo, $L_{(rf)}(x_0) = L_f(x_0)$.

iii) Si 1/f es convexa en V entonces $L_{(1/f)}(x_0) = 2 - L_f(x_0)$.

iv) Sea g una función de las mismas características que f, de manera que esté definida la composición $f \circ g$, entonces

$$L_{(f\circ g)}(x_0) = [\,\hat{L}_f(g(x_0)) + \hat{L}_g(x_0)](f\circ g)(x_0)$$

v) $L_f(x_0) \geq 0$ y además $L_f(x_0) = 0$ sí y sólo sí existe k número par, tal que $f''(x_0) = \dots = f^{(k-1}(x_0) = 0$ y $f^{(k}(x_0) > 0$.

Demostración:

Basta calcular las derivadas correspondientes y sustituir en la expresión adecuada. Para el apartado (i) tenemos

$$L_{(r+f)}(x_0) = \frac{(r+f)''(x_0)(r+f)(x_0)}{[(r+f)'(x_0)]^2} = \frac{f''(x_0)f(x_0)}{[f'(x_0)]^2} + r\,\frac{f''(x_0)}{[f'(x_0)]^2} = L_f(x_0) + \hat{L}_f(x_0).$$

$$ii)\quad L_{(rf)}(x_0) = \frac{rf''(x_0)rf(x_0)}{[rf'(x_0)]^2} = \frac{f''(x_0)f(x_0)}{[f'(x_0)]^2} = L_f(x_0).$$

iii) $$L_{\frac{1}{f}}(x_0) = \frac{\dfrac{2f(x_0)f'(x_0)^2 - f''(x_0)f(x_0)^2}{f(x_0)^4}\dfrac{1}{f(x_0)}}{\dfrac{f'(x_0)^2}{f(x_0)^4}} = 2 - \frac{f''(x_0)f(x_0)}{[f'(x_0)]^2} = 2 - L_f(x_0)$$

iv) $$L_{(f\circ g)}(x_0) = \frac{[f''(g(x_0))g'(x_0)]^2 + f'(g(x_0))g''(x_0)](f\circ g)(x_0)}{[f'(g(x_0))g'(x_0)]^2} =$$

$$= \left[\frac{f''(g(x_0))}{[f'(g(x_0))]^2} + \frac{g''(x_0)}{[g'(x_0)]^2}\right](f\circ g)(x_0) = [\,\hat{L}_f(g(x_0)) + L_g(x_0)\,](f\circ g)(x_0).$$

v) $L_f(x_0) = f''(x_0)\, f(x_0)[f'(x_0)]^{-2} \geq 0$ al ser f convexa y positiva.

Si $L_f(x_0) = 0$ se sigue que $f''(x_0) = 0$ pues $f'(x_0) \neq 0$ al no ser x_0 un mínimo para f y como además f es convexa existirá un número k par tal que $f''(x_0) = ... = f^{(k-1}(x_0) = 0$ y $f^{(k}(x_0) > 0$. El recíproco resulta obvio. #

Por último damos unas acotaciones para el grado de convexidad de la suma de funciones.

Teorema 1.9.

Sean f, $g \in C^{(2}(V)$, positivas y convexas en V tales que $f'(x_0)\, g'(x_0) \leq 0$, entonces $L_{(f+g)}(x_0) \geq$ mín. $\{ L_f(x_0), L_g(x_0) \}$.

Demostración:

Podemos suponer $L_f(x_0) < L_g(x_0)$ y estudiemos el signo de $L_{(f+g)}(x_0) - L_f(xo)$. Es fácil ver que

$$(1.10) \qquad L_{(f+g)} - L_f = \frac{[gg''(f')^2 - f''f(g')^2] + (f')^2\,[f''g + g''f] - 2ff'f''g'}{(f')^2[f'+g']^2}$$

y como $f''(x_0)\, g(x_0) + f(x_0)\, g''(x_0) \geq 0$ por ser f y g positivas y convexas en V, $g(x_0)\, g''(x_0)\, [f'(x_0)]^2 - f(x_0)\, f''(x_0)\, [g'(x_0)]^2 \geq 0$ por ser $L_f(x_0) < L_g(x_0)$ y además $f(x_0)\, f'(x_0)\, f''(x_0)\, g'(x_0) \leq 0$ por ser $f'(x_0)\, g'(x_0) \leq 0$ y f convexa y positiva, entonces $L_{(f+g)}(x_0) - L_f(x_0) \geq 0$ y por tanto $L_{(f+g)}(x_0) \geq$ mín. $\{L_f(x_0), Lg(x_0)\}$

Teorema 1.10.

Sean f, $g \in C^{(2}(V)$, positivas y convexas en V tales que

i) $L_f(x_0) \geq L_g(x_0)$

ii) $f'(x_0) \geq 0$ y

iii) $f'(x_0)/\, g'(x_0) \leq$ mín. $\{f(x_0)/\, g(x_0),\, f''(x_0)/\, g''(x_0)\}$, entendiendo que si $g'(x_0)$ ó $g''(x_0)$ son cero, entonces $f'(x_0)$ o $f''(x_0)$ también lo serán.

Entonces $L_{(f+g)}(x_0) \leq$ máx. $\{ L_f(x_0), L_g(x_0) \} = L_f(x_0)$.

Demostración:

Basta tener en cuenta la expresión (1.10) y que se verifica

a) $g(x_0)g''(x_0)[f'(x_0)]^2 - f(x_0)f''(x_0)[g'(x_0)]^2 \leq 0$, por (i).

b) $g''(x_0)\, f(x_0)\, [f'(x_0)]^2 - f(x_0)\, f'(x_0)\, f''(x_0)g'(x_0) =$

$= f(x_0)\, f'(x_0)\, [g''(x_0)\, f'(x_0) - f''(x_0)g'(x_0)] \leq 0$ al ser $f(x_0)f'(x_0) \geq 0$

por (ii)) y $g''(x_0)f'(x_0) - f''(x_0)g'(x_0) < 0$ por (iii).

c) $f''(x_0)\, g(x_0)\, [f'(x_0)]^2 - f(x_0)\, f'(x_0)\, f''(x_0)g'(x_0) =$

$= f'(x_0)\, f''(x_0)\, [\, g(x_0)\, f'(x_0) - f(x_0)g'(x_0)] \leq 0$ por razones análogas a las utilizadas anteriormente.

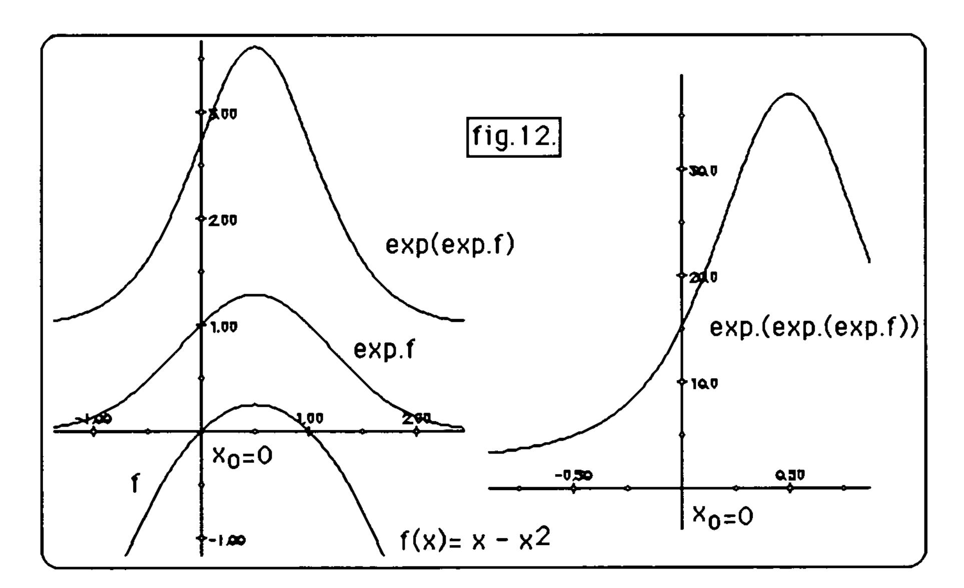
De a), b) y c) se deduce que $L_{(f+g)}(x_0) - L_f(x_0) \leq 0$. #

CAPÍTULO 2

MEDIDA DE LA CONCAVIDAD DE UNA CURVA MEDIANTE EL OPERADOR EXPONENCIAL

2.0. Introducción

Se puede realizar un análisis análogo al del Capítulo 1 para estudiar la concavidad de una función, utilizando la acción del operador exponencial sobre las funciones cóncavas. Al ser la exponencial una función convexa, va disminuyendo la concavidad de la función a la que se le aplica hasta conseguir, que en una de sus repetidas aplicaciones, la función obtenida sea convexa. Obtendremos así un índice de medida, en cada punto, de la concavidad de la función considerada .



La figura 12 muestra que hemos de aplicar tres veces el operador exponencial a la función $f(x) = x - x^2$, que es cóncava en el punto $x_0 = 0$, para que deje de serlo .

2.1. Funciones exponencialmente cóncavas

Sea V un entorno del punto x_0 y $f \in C^{(m}(V)$ con $m \geq 2$, cóncava en V. Decimos que f es una función exponencialmente cóncava en x_0 si exp f es una función cóncava en x_0. Entonces, si f es una función exponencialmente cóncava en x_0, existe un entorno W de x_0 y una función $h \in C^{(m}(W)$ cóncava, $W \subset V$, de manera que $f(x) = \log h(x)$ en W, es decir, $h(x)=e^{f(x)}$ en W. Operando con la expresión obtenida para la función f se sigue que $h'(x) = f'(x) \exp [f(x)] = h(x) f'(x)$ y además $h''(x) = f''(x) h(x) + [f'(x)]^2 h(x) = [f''(x) + f'(x)^2] h(x)$. De estas igualdades se obtiene

$$(2.1) \qquad h''(x) = [f''(x) + f'(x)^2]\, e^{f(x)}$$

igualdad que nos va a permitir realizar el estudio de la concavidad de la función h. Obtenemos así los siguientes resultados, análogos a los Teoremas 1.1 y 1.2.

Teorema 2.1.

(i) Si x_0 no es un punto crítico de f, se verifica

(a) f es exponencialmente cóncava en x_0, en sentido estricto,

$$\text{sí y sólo sí} \qquad -\frac{f''(x_0)}{f'(x_0)^2} > 1.$$

(b) f es exponencialmente cóncava en x_0, en sentido no estricto sí y sólo sí existe $k \in N$ número par, $k \leq m$, de manera que

$$(2.2) \qquad \begin{cases} f^{(t}(x_0) = (-1)^{t+1}(t-1)!\,[f'(x_0)]^t & 2 \leq t \leq k-1 \\ f^{(k}(x_0) < -(k-1)!\,[f'(x_0)]^k & \end{cases}$$

(ii) Si f es una función cóncava en sentido no estricto, entonces f no es exponencialmente cóncava.

Demostración:

Como $h'(x_0) = f'(x_0) \exp [f(x_0)] \neq 0$, x_0 no es punto crítico de h. El apartado (a) del punto (i) es claro, por (2.1). Para probar (b), como $h = e^{f(x)}$ es cóncava en x_0, pero en sentido no estricto, se verifica que existe $k \in N$ número par, $k \leq m$, de

manera que $h''(x_o) = \dots = h^{(k-1}(x_o) = 0$ y $h^{(k}(x_o) > 0$, luego teniendo en cuenta (2.1) se obtiene que $-f''(x_o)=[f'(x_o)]^2$.

Para probar (2.2), basta aplicar un proceso inductivo, teniendo en cuenta que $h'(x) = h(x) f'(x)$, por tanto se verifica

$$(2.3) \qquad h^{(n+1}(x_o) = \sum_{t=0}^{n} \binom{n}{t} f^{(t+1}(x_o) h^{(n-t}(x_o).$$

El recíproco se obtiene fácilmente a partir de (2.3).

La primera de las condiciones (2.2) no es suficiente para que la función f sea exponencialmente cóncava, como prueba el ejemplo siguiente.

Ejemplo 2.1.

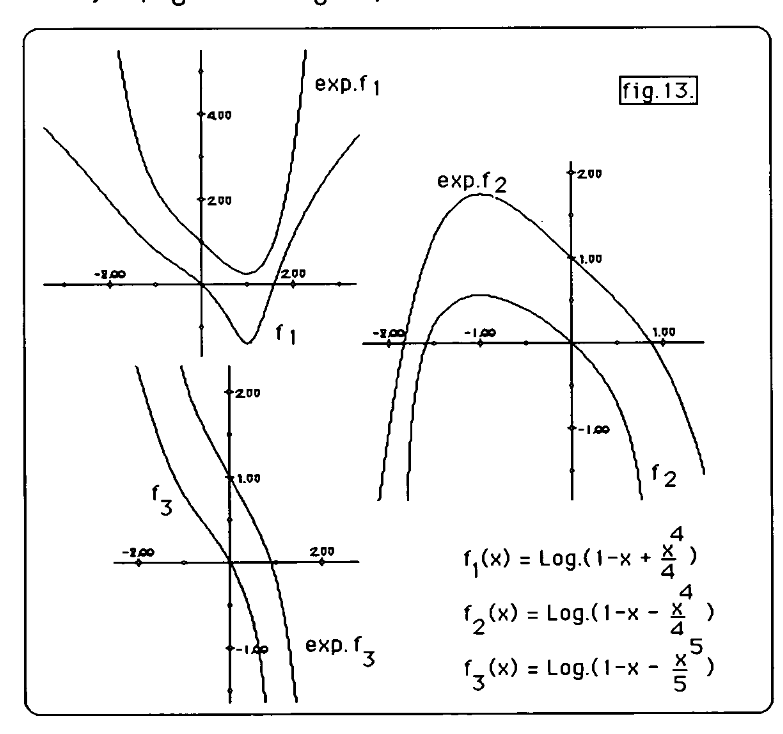
Las funciones

$$f_1(x) = \text{Log}.(1 - x + \frac{x^4}{4})$$

$$f_2(x) = \text{Log}.(1 - x - \frac{x^4}{4})$$

$$f_3(x) = \text{Log}.(1 - x - \frac{x^5}{5})$$

verifican dicha condición para $x_o = 0$ y $k = 2$. Sin embargo exp f_1 es convexa, exp f_2 es cóncava y exp f_3 tiene en x_o un punto de inflexión.



Teorema 2.2.

Si x_0 es un punto crítico de f, es decir un máximo, entonces se verifica

$$(2.4) \qquad \lim_{x \to x_0} - \frac{f''(x)}{[f'(x)]^2} = +\infty .$$

Además x_0 será un máximo de $h = e^f(x)$, manteniéndose para h el carácter estricto o no estricto que x_0 tenga para f.

Demostración:

Para probar este teorema es necesario distinguir dos situaciones posibles. A parte de verificarse que $f'(x_0) = 0$ puede ocurrir que

1.) $f''(x_0) < 0$

2.) Exista $k \in N$ número par, $k \leq m$, de manera que

$f''(x_0) = \ldots = f^{(k-1}(x_0) = 0$ y $f^{(k}(x_0) < 0$.

En el caso 1.) resulta obvio que, como $f''(x_0) < 0$ se verifica (2.4). Además, se tiene que $h'(x_0) = 0$ y $h''(x_0) < 0$, luego se mantiene el carácter estricto del máximo x_0 de f para la función $h = e^{f(x)}$.

En cuanto a 2.), aplicando la regla de L'Hôpital, se prueba que también verifica (2.4). Y considerando la expresión (2.3) se obtiene que $h'(x_0) = h''(x_0) = \ldots = h^{(k-1}(x_0) = 0$ y $h^{(k}(x_0) < 0$, luego x_0 es un máximo no estricto para h. #

Notemos que del punto (a), del apartado (i) de este resultado se sigue que f ha de ser estríctamente cóncava en x_0. Por otra parte, es sencillo probar que si f es cóncava en x_0 de forma no estricta, no siendo x_0 un punto crítico de f, entonces $h = e^{f(x)}$ es una función convexa en x_0. Para demostrar esto basta considerar la expresión (2.1).

2.2. Definición del grado de concavidad exponencial de una función

Para dar un índice de medida puntual de la concavidad de una función, repetimos el proceso realizado en el caso de la convexidad utilizando el operador exponencial en vez del logarítmico.

Sea V un entorno del punto x_0 y $f \in C^{(m}(V)$ con $m \geq 2$, una función cóncava en x_0. Además, para obtener una simplificación en los cálculos, suponemos $f(x_0) = 0$, posteriormente indicaremos qué hacer para un valor arbitrario de f en el punto x_0.

Llamamos T al operador normalización a cero, dado por

$$T : C^{(m}_{(x_0,1)}(V) \to C^{(m}_{(x_0,0)}(V) \quad \text{tal que} \quad T[g](x) = g(x) - g(x_0)$$

Entonces definimos las siguientes sucesiones de funciones:

$$Q_1(x) = \exp f(x) \qquad R_1(x) = T[Q_1](x)$$

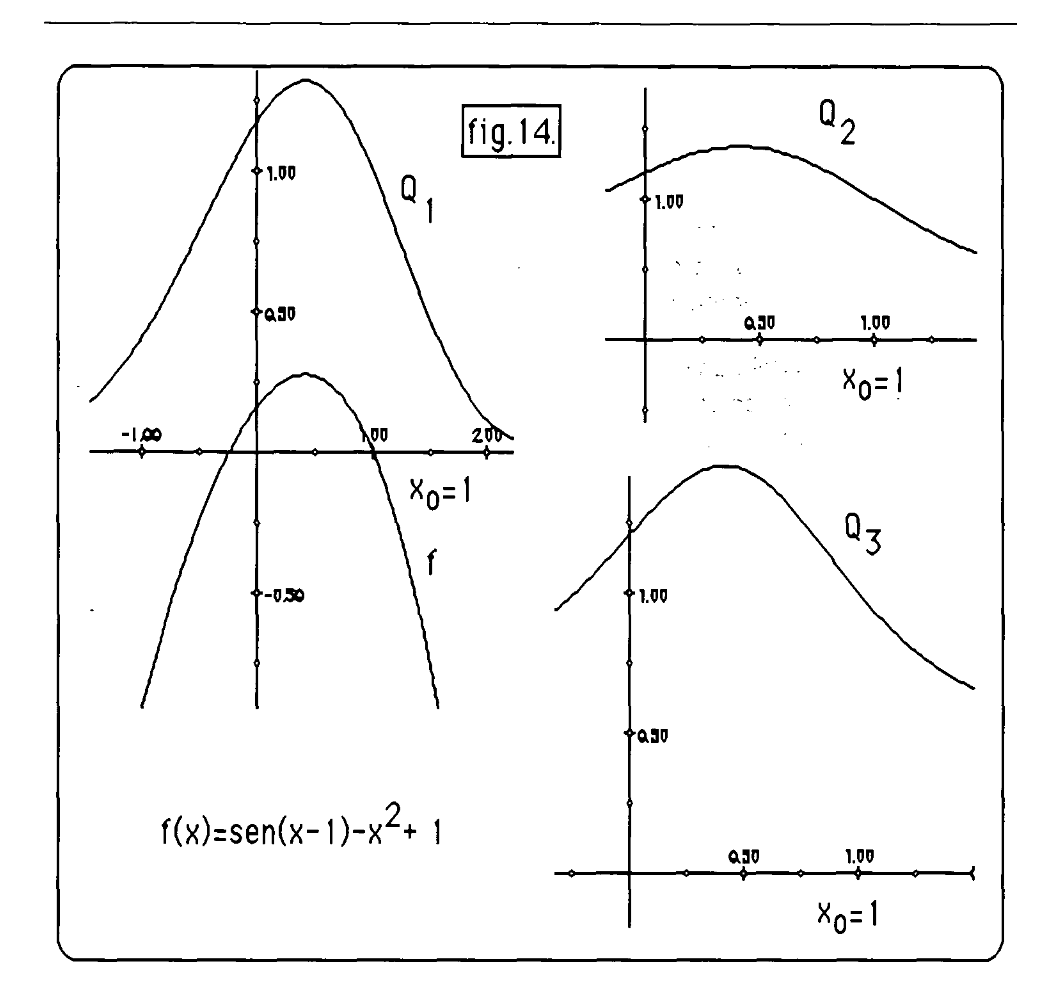
$$Q_2(x) = \exp R_1(x) \qquad R_2(x) = T[Q_2](x)$$

$$Q_n(x) = \exp R_{n-1}(x) \qquad R_n(x) = T[Q_n](x)$$

Así, el estudio de la concavidad en el punto x_0, de las funciones que forman la sucesión

$$\{Q_n\}_{n\geq 1} \subset C^{(m}_{(x_0,1)}(V),$$

nos va a permitir medir la resistencia de la función f a transformarse en convexa, mediante sucesivas aplicaciones del operador exponencial. Así por ejemplo, si consideramos la función $f(x) = \text{sen}(x-1) - x^2+1$ en el punto $x_0 = 1$, se comprueba que Q_1 y Q_2 son cóncavas en x_0 mientras que Q_3 ya pasa a ser convexa en el punto x_0. (fig. 14.)



Notemos que $\{R_n\}_{n\geq 1} \subset C^{(m}_{(x_0\ ,\ 0)}$.

Esta medida nos permite definir el grado de concavidad exponencial de f en x_0. Introducimos para ello el concepto de función "n-exponencialmente cóncava"

Definición 2.2.

Diremos que f es n - exponencialmente cóncava en x_0 si Q_n es cóncava en x_0.

Si f es n - exponencialmente cóncava en x_0 para todo $n \in \mathbb{N}$ diremos que f es infinitamente - exponencialmente cóncava en x_0.

Tratamos ahora de caracterizar analíticamente este concepto. Como en el caso de la convexidad comenzaremos obteniendo una expresión para la segunda derivada de las funciones de la sucesión $\{Q_n\}_{n\geq 1}$.

Teorema 2.3.

Para todo $n\in \mathbb{N}$ se verifica:

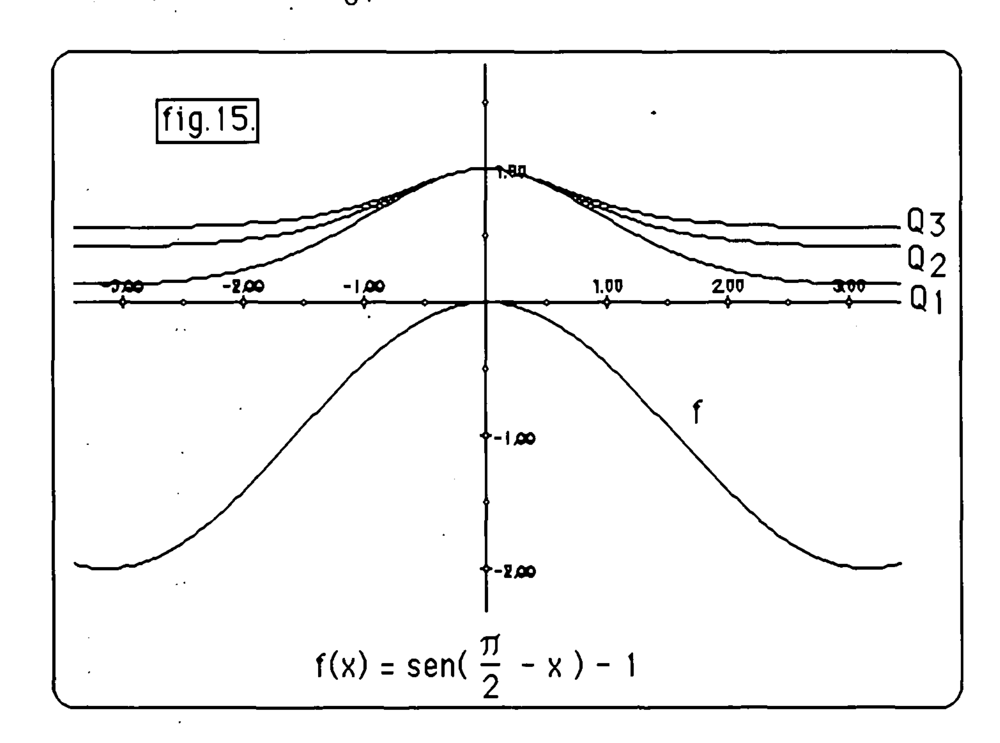
(2.5) $Q'_n(x_0) = f'(x_0)$

(2.6) $Q''_n(x_0) = f''(x_0) + n\,[f'(x_0)]^2$

Demostración:

Se demuestra por inducción, de manera análoga al Teorema1.4. #

Notar que si f es n-exponencialmente cóncava en x_0 entonces f es k-exponencialmente cóncava en x_0 para $k\in \mathbb{N}$ con $1\leq k\leq n$.



A continuación caracterizamos analíticamente el concepto de función n-exponencialmente cóncava en x_0.Distinguimos dos situaciones, en primer lugar anali-

zaremos el caso en que x_0 sea un punto crítico de f, es decir, un máximo (fig.15) y posteriormente el caso en que x_0 no sea un punto crítico (fig. 14 y 16).

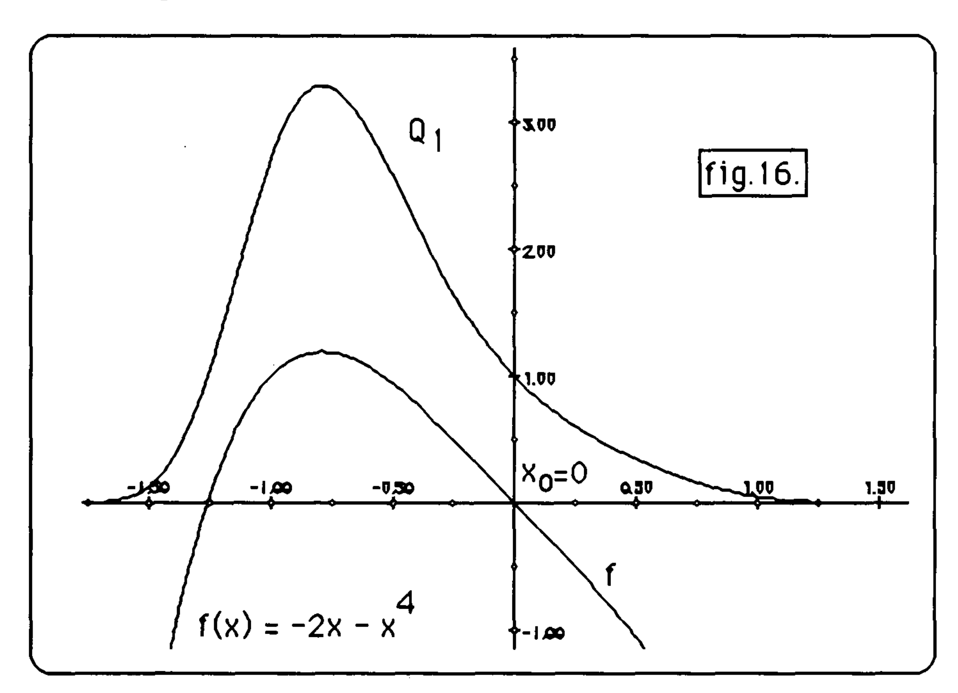
Teorema 2.4.

(i) Si x_0 es un máximo de f entonces también lo es de Q_n para todo $n \in \mathbb{N}$. Además el carácter del máximo es el mismo en f que en cualquiera de las Q_n, $n \in \mathbb{N}$.

(ii) f es infinítamente-exponencialmente cóncava en x_0 sí y sólo sí x_0 es un máximo de f.

Demostración:

Es análoga a la del Teorema 1.5. #



Como en el caso de la convexidad, cuando x_0 no es un punto crítico de f se nos presentan dos posibles situaciones : f estríctamente cóncava en x_0 (fig.14.) ó bien f cóncava en sentido no estricto en x_0 (fig.16.).

El Teorema siguiente recoge los resultados obtenidos en estas situaciones, cuya demostración es análoga a la del Teorema 1.6.

Teorema 2.5.

Supongamos que x_0 no es un punto crítico de f, que es una función cóncava en sentido estricto en el punto x_0. Entonces

(i) Si $r = -f''(x_0)/[f'(x_0)]^2 \notin N$ entonces se verifica que

(a) Sea $p = E[r] \in N$, entonces Q_p es estríctamente cóncava en x_0 y Q_{p+1} es estríctamente convexa en x_0. Por tanto f es p - exponencialmente cóncava en x_0 y no es (p+1) -exponencialmente cóncava en x_0.

(b) f es n-exponencialmente cóncava en x_0 para $n \leq E[r]$.

(ii) Si $r \in N$ se verifica:

(a) f es (r-1)-exponencialmente cóncava en x_0, siendo Q_{r-1} estríctamente cóncava en x_0. Además Q_{r+1} es estríctamente convexa en x_0, luego f no es (r+1) - exponencialmente cóncava en x_0.

(b) f es r - exponencialmente cóncava en x_0 si y sólo si existe $k \in N$, número par, tal que

$$Q_{r-1}^{(t}(x_0) = f^{(t}(x_0) = (-1)^{t+1}(t-1)!\,f'(x_0)^t \qquad 2 \leq t \leq k-1$$

$$Q_{r-1}^{(k}(x_0) < -(k-1)!\,f'(x_0)^k. \qquad \#$$

En la figura 13 puede verse la situación del apartado (ii).

La situación que nos queda por analizar, que f sea una función cóncava en sentido no estricto en x_0, resulta evidente ya que en este caso sabemos que existe $k \in N$, número par, de manera que $f''(x_0) = ... = f^{(k-1}(x_0) = 0$ y $f^{(k}(x_0) < 0$; como además $f'(x_0) \neq 0$, teniendo en cuenta (2.6) se sigue inmediatamente que Q_n es una función estrictamente convexa en x_0 para cualquier $n \in N$. (fig. 16.)

Una vez estudiadas las diferentes posibilidades de concavidad que pueden presentarse en el punto x_0, resulta sencillo observar que estas quedan perfectamente determinadas analizando el valor de la expresión $-f''(x_0)[f'(x_0)]^{-2}$, la cual por (2.6), nos permite estudiar la concavidad o convexidad de Q_n en x_0 para cualquier $n \in N$. Este es el origen de la definición de "grado de concavidad exponencial".

Definición 2.6.

El grado de concavidad exponencial de la función f en el punto x_0 es el número real dado por la expresión

$$(2.7) \qquad \hat{E}_f(x_0) = -\frac{f''(x_0)}{[f'(x_0)]^2}$$

cuando x_0 no es un máximo de f, en cuyo caso $\hat{E}_f(x_0) = +\infty$.

Notemos que $\hat{E} : C^{(m}_{(x_0,\, 0)} \rightarrow \mathrm{R}$, si consideramos funciones cóncavas, la imagen estaría en $[0, +\infty]$.

En el caso de que f tome un valor arbitrario en el punto x_0, consideraremos la función $f^*(x) = f(x) - f(x_0)$. Dado que exp f y exp f* poseen la "misma concavidad" en el punto x_0, ya que $\exp f^*(x) = [\exp f(x_0)]^{-1} \exp f(x)$, y por tanto se diferencian en el producto por una constante positiva. Entonces el grado de concavidad exponencial de f en x_0 es el número real dado por la expresión

$$(2.8) \qquad E_f(x_0) = \hat{E}_{f^*}(x_0) = -\frac{f''(x_0)}{[f'(x_0)]^2}$$

si x_0 no es un máximo de f, en cuyo caso $E_f(x_0) = +\infty$.

Notemos que si consideramos una función en un entorno del punto x_0, es claro que el grado de concavidad exponencial de una función cóncava es un número real positivo. Siendo "más cóncava" respecto a la función exponencial a medida que mayor sea dicho número.

Por otra parte, resulta evidente que el grado de concavidad exponencial sí es invariante por traslaciones, propiedad geométrica que nos va a ser de gran utilidad.

2.3. Propiedades del grado de concavidad exponencial.

Análogamente a como se probaron las propiedades del grado de convexidad logarítmico en el párrafo 1.3 del Tema I, unos sencillos cálculos nos dan las siguientes propiedades para el grado de concavidad exponencial.

Teorema 2.7.

Sea $f \in C^{(2}(V)$ cóncava en V, entonces se verifican las siguientes propiedades

i) Para todo número real r, $E_{(r+f)}(x_0) = E_f(x_0)$.

ii) Para todo número real positivo, $E_{(rf)}(x_0) = E_f(x_0)/r$.

iii) Si 1/f es cóncava en V , $E_{(1/f)}(x_0) = f(x_0)[\, L_f(x_0) - 2\,] =$
$= - f(x_0)[\, 2 + f(x_0)E_f(x_0)]$.

iv) $E_f(x_0) \geq 0$ y además $E_f(x_0) = 0$ sí y sólo sí existe un número par k tal que $f''(x_0) =\ldots = f^{(k-1}(x_0) = 0$ y $f^{(k}(x_0) < 0$.

v) Sea g una función de las mismas características que f de manera que esté definida la composición $f \circ g$, entonces
$E_{(f \circ g)}(x_0) = E_f(g(x_0)) + E_g(x_0)$. #

Como ocurría con el grado de convexidad, se tienen las siguientes acotaciones para el grado de concavidad de la suma

Teorema 2.8.

Sean f, g $\in C^{(2}(V)$, cóncavas en V tales que $f'(x_0)g'(x_0) \leq 0$, entonces $E_{(f+g)}(x_0) \geq$ mín. $\{E_f(x_0), E_g(x_0)\}$.

Demostración:

Se supone $E_f(x_0) < E_g(x_0)$ y se estudia el signo de $E_{(f+g)}(x_0) - E_f(x_0)$. #

Teorema 2.9.

Sean f, g $\in C^{(2}(V)$, cóncavas en V tales que

i) $E_f(x_0) \geq E_g(x_0)$

ii) $f'(x_0)\, g'(x_0) \geq 0$

Entonces $E_{(f+g)}(x_0) \leq$ máx. $\{E_f(x_0), E_g(x_0)\} = E_f(x_0)$. #

CAPÍTULO 3

ÍNDICES DE MEDIDA DE LA CONVEXIDAD Y DE LA CONCAVIDAD

3.0. Introducción.

En este capítulo vamos a considerar una función cóncava φ en un dominio $W \subset \mathbb{R}$, $\varphi \in C^{(p}(W)$, y $f \in C^{(p}(V)$, $p \geq 2$, una función convexa en un entorno V de un punto x_0, con $y_0 = f(x_0) \in W$.

La curvatura de una función f en x_0 [14], que viene dada por

la expresión $$K(f)(x_0) = \frac{f''(x_0)}{[1+f'(x_0)^2]^{3/2}}$$ es una medida de la

convexidad de una función convexa f en cada punto. Es claro que si $\varphi'(y_0)=1$ entonces φof tiene curvatura más pequeña que f, puesto que

(3.1.) $(\varphi of)'(x_0) = \varphi'(y_0)\, f'(x_0)$ y

(3.2.) $(\varphi of)''(x_0) = \varphi''(y_0)\, f'(x_0)^2 + \varphi'(y_0) f''(x_0)$.

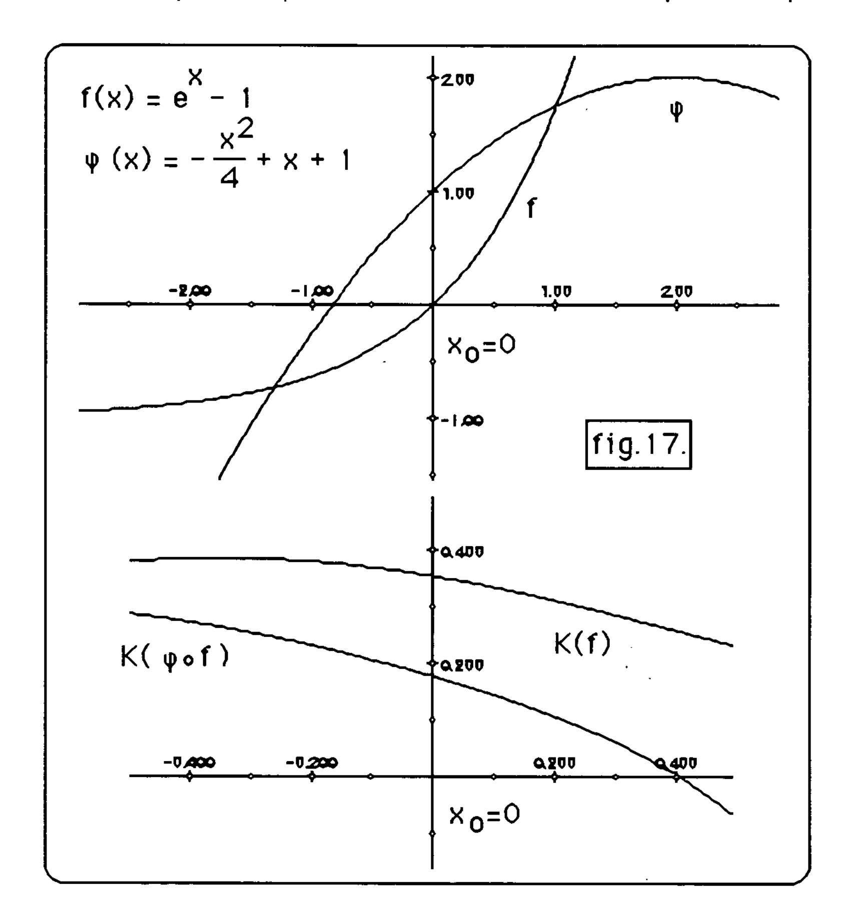
Asi $$K(\varphi of)(x_0) = \frac{(\varphi of)''(x_0)}{[1 + (\varphi of)'(x_0)^2]^{3/2}} \leq K(f)(x_0) .$$

Por tanto aplicando un operador cóncavo a una función convexa obtenemos una función de curvatura más pequeña que la función convexa inicial. Podemos observar esta situación en el siguiente ejemplo

Ejemplo 3.1.

Sea $f(x) = e^x - 1$ y $\varphi(x) = 1 + x - x^2/4$, entonces $\varphi \circ f(x) = e^x - (e^x - 1)^2/4$. La fig. 17. compara K(f) y K($\varphi$of) para $x_0 = 0$.

En este estudio consideramos el efecto del operador cóncavo φ sobre el conjunto de las funciones convexas reales en un entorno de un punto dado. Es decir, de qué manera el operador φ "concaviza" a la función f a la que se le aplica.



Introducimos un índice de medida de la convexidad para cada función convexa f de $C^{(p}(V)$ en un punto dado. Este índice denotará el número de veces que hemos de componer la función f con el operador φ para obtener una función cóncava.

Terminamos el capítulo estudiando de forma análoga la acción de un operador convexo sobre el conjunto de las funciones cóncavas de $C^{(p}(V)$.

3.1. Funciones φ - Convexas.

Con la notación anterior diremos que f es **φ-convexa en x_0** sí y sólo sí $\varphi o f$ es una función convexa en x_0. Como la convexidad de $\varphi o f$ puede ser en sentido estricto o no estricto, es decir, que $(\varphi o f)''(x_0) > 0$ o bien que exista un número par $k \in N$ tal que $(\varphi o f)''(x_0) = \ldots = (\varphi o f)^{(k-1}(x_0) = 0$ y $(\varphi o f)^{(k}(x_0) > 0$, tenemos así los conceptos de función φ-convexa en sentido estricto y no estricto. En lo que sigue también utilizaremos otros conceptos como el de punto mínimo x_0 en sentido estricto y no estricto. Su definición es análoga, es decir, si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) > 0$ o bien $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(k-1}(x_0) = 0$ y $f^{(k}(x_0) > 0$ donde k es un número par.

En primer lugar queremos caracterizar las funciones φ-convexas. Notar que si φ es una función decreciente en un entorno de y_0, $\varphi'(y_0) \leq 0$, entonces se sigue de (3.2.) que $\varphi o f$ será siempre una función cóncava. Se obtiene el mismo resultado si φ es una función cóncava en sentido no estricto en $y_0 = f(x_0)$, pues entonces $\varphi''(y_0) = 0$. Para no perder el sentido geométrico inicial, en lo que sigue supondremos que φ es una función creciente y cóncava en sentido estricto en un entorno W de y_0, es decir, $\varphi'(y)>0$ y $\varphi''(y) < 0$ en un entorno W de y_0.

Considerando el valor de las expresiones (3.1.) y (3.2.) en x_0 y los diferentes tipos de convexidad obtenemos los siguientes resultados

Teorema 3.1.

Sea x_0 tal que $f'(x_0) \neq 0$.

(i) Si f es una función estríctamente convexa en x_0 se verifica

(a) f es strictamente φ- convexa en x_0 sí y sólo sí

$$\frac{\varphi'(y_0)\, f''(x_0)}{[-\varphi''(y_0)]\, f'(x_0)^2} > 1.$$

(b) Si f es una función φ - convexa en x_0 en sentido no estricto, entonces

$$\frac{\varphi'(y_0)\, f''(x_0)}{[-\varphi''(y_0)]\, f'(x_0)^2} = 1. \qquad (3.3)$$

(ii) Si f es una funcion convexa en x_0 en sentido no estricto, entonces f no es φ - convexa.

Demostración:

(a) y (b) se siguen fácilmente de (3.1.) y (3.2.).

Al ser $f''(x_0)=0$ implica que $(\varphi o f)''(x_0) = \varphi''(y_0)\, f'(x_0)^2 < 0$ y se sigue ii). #

Nota:

La condicion (3.3.) no es suficiente para que la función f sea φ-convexa en sentido no estricto, como se puede ver en el siguiente ejemplo.

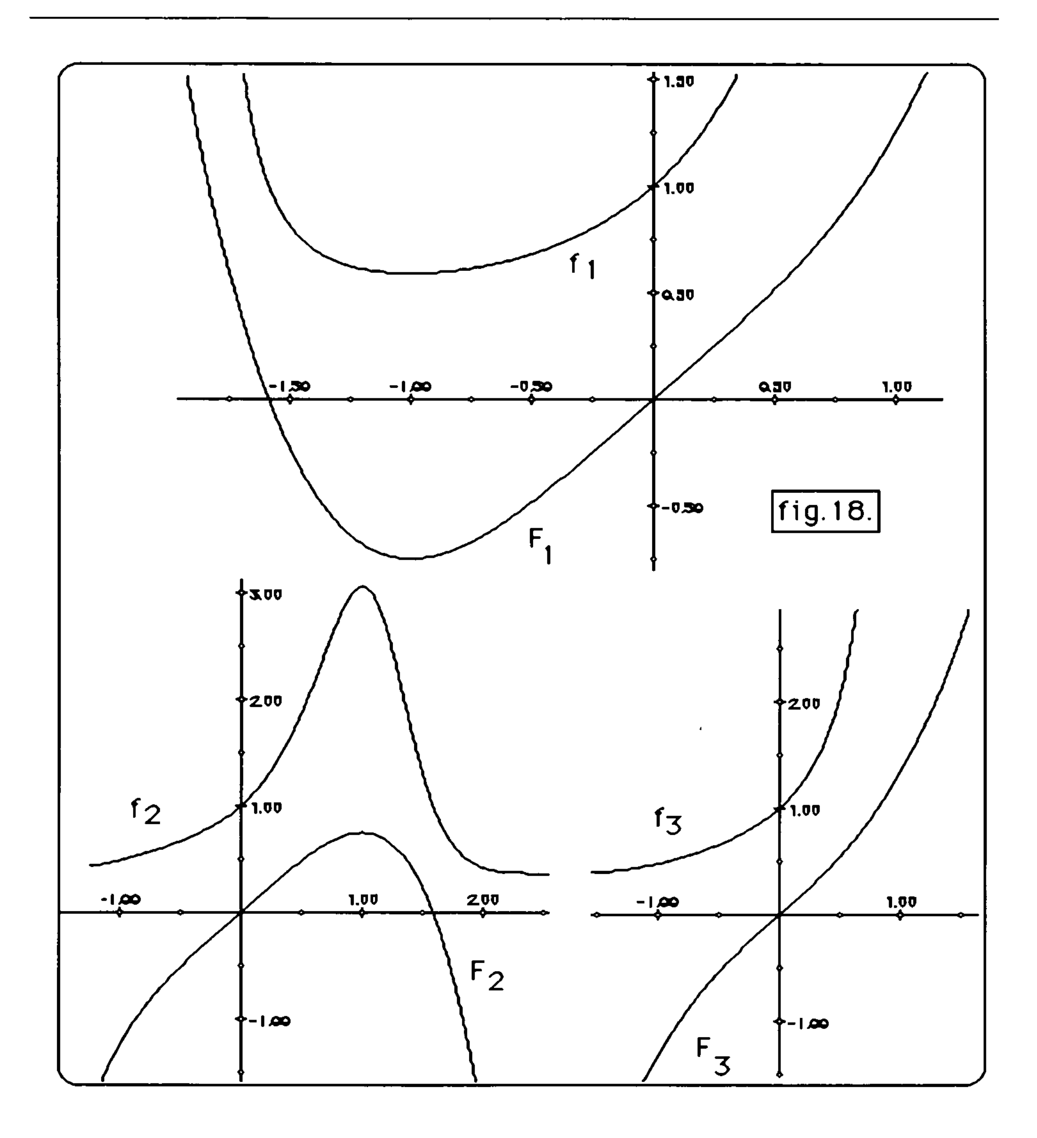
Ejemplo 3.2.

Dadas las funciones f_i , i = 1,2,3, por las expresiones

$$f_1(x) = \exp\left(\frac{x^4}{4} + x\right), \quad f_2(x) = \exp\left(x - \frac{x^4}{4}\right) \quad \text{y} \quad f_3(x) = \exp\left(\frac{x^3}{3} + x\right).$$

Si tomamos como $\varphi(x) = \log x$, estas funciones verifican la condición (3.3.) para $x_0=0$. Denotemos $F_i = \varphi\, o f_i$, i = 1, 2, 3.

La fig.18. muestra que $F_1''(0) > 0$, $F_2''(0) < 0$ y F_3 tiene un punto de inflexión en x_0.



Por otra parte, si f tiene un mínimo en x_0, entonces tenemos

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\varphi'(f(x))\, f''(x)}{[-\, \varphi''(f(x))]\, f'(x)^2} = +\infty .$$

Además, φof tendrá un mínimo en x_0 manteniéndose el carácter estricto o no estricto que f tiene en x_0.

3.2. φ-grado de convexidad.

En este párrafo definiremos un índice puntual de medida de la convexidad de una función. Como ya comentamos en la introducción aplicaremos reiteradamente el operador φ a la función f y definiremos este índice como el número de veces que necesitamos aplicar dicho operador hasta obtener una función cóncava.

En las condiciones usuales, definimos las siguientes sucesiones:

$F_1(x) = \varphi\, of(x)$ $\qquad G_1(x) = N[F_1](x) = \varphi\, of(x) - \varphi\, of(x_0) + f(x_0)$

$F_2(x) = \varphi\, oG_1(x)$ $\qquad G_2(x) = N[F_2](x) = F_2(x) - F_2(x_0) + f(x_0)$

- - - - - - - - - $\qquad$ -

$F_n(x) = \varphi\, oG_{n-1}(x)$ $\qquad G_n(x) = N[F_n](x)$.

Notemos que $F_k(x_0) = \varphi of(x_0)$ y $G_k(x_0) = f(x_0)$ para cada $k \in N$. Así, estudiaremos la convexidad de las funciones F_n para medir la resistencia que tiene la función f a ser "concavizada" por el operador φ. Para realizar este estudio introduciremos el concepto de función n-φ–convexa, que es una generalización del concepto de función φ-convexa que hemos estudiado en el último párrafo.

Definición 3.2.

f es una función n - φ - convexa en x_0 si F_n es convexa en x_0.

Si f es una función n - φ - convexa en x_0 para todo $n \in N$, diremos que f es indefinidamente φ-convexa.

A continuación vamos a caracterizar analíticamente estos conceptos obteniendo una expresión de las derivadas sucesivas de F_n, para todo $n \in N$.

Teorema 3.3.

Se verifica para todo $n \in N$

(i) $F'_n(x_0) = \varphi'(y_0)^n f'(x_0)$.

(ii) $F''_n(x_0) = \varphi''(y_0)\varphi'(y_0)^{n-1}\left[\sum_{k=0}^{n-1} \varphi'(y_0)^k\right] f'(x_0)^2 + \varphi'(y_0)^n f''(x_0)$

Demostración:

Aplicaremos inducción para probar ambas igualdades. Las dos fórmulas son claras para n =1. Supongamos, por hipótesis de inducción, que (i) y (ii) se verifican para m. Como $F'_{m+1}(x) = \varphi'(G_m(x))\, F'_m(x)$, aplicando la hipótesis de inducción se sigue que $F'_{m+1}(x_0) = \varphi'(y_0)^{m+1} f'(x_0)$. Esto prueba (i).

Por otra parte, al ser $F''_{m+1}(x)=\varphi''(G_m(x))F'_m(x)^2+\varphi'(G_m(x))F''_m(x)$, un argumento de inducción prueba (ii). #

Notemos que si f es n-φ-convexa en x_0, entonces f es k-φ-convexa en x_0 para todo $1 \leq k \leq n$.

Cuando F_n sea convexa en sentido no estricto calcularemos las derivadas sucesivas por recurrencia aplicando (3.1.) y (3.2.), en otro caso tendremos

$$(3.4.) \qquad F_n^{(k+1}(x) = \sum_{t=0}^{k} \binom{k}{t} [\varphi'(G_{n-1}(x))]^{(t}\, F_{n-1}^{(k-t+1}(x)$$

A continuación, teniendo en cuenta los diferentes tipos de convexidad en x_0, caracterizaremos el concepto de función n-φ-convexa en x_0. Comenzaremos estudiando el caso en que f tenga un mínimo en x_0.

Teorema 3.4.

(i) Si f tiene un mínimo en x_0, F_n también lo tiene para todo $n \in N$. Además el carácter del mínimo es el mismo para f y para cada F_n, $n \in N$.

(ii) f tiene un mínimo en x_0 sí y sólo sí f es indefinidamente φ-convexa en x_0.

Demostración:

(i) es inmediato si x_0, es un mínimo estricto. En otro caso, es decir, si existe un número par $k \in N$ tal que $f'(x_0) =.. = f^{(k-1}(x_0) =0$ y $f^{(k}(x_0) > 0$, aplicaremos inducción para probar que F_n tiene un mínimo en x_0 para todo $n \in N$, en sentido no estricto. Para n =1, como $F'_1(x) = \varphi'(f(x))f'(x)$, se tiene que

$$F_1^{(r+1}(x) = \sum_{t=0}^{r} \binom{r}{t} [\varphi'(f(x))]^{(t}\, f^{(r-t+1}(x) \quad \text{y} \quad F'_1(x_0) = F''_1(x_0) = \dots = F_1^{(k-1}(x_0) =$$

$$= 0, \quad \text{por tanto} \quad F_1^{(k-1}(x_0) = \varphi'(y_0)\, f^{(k}(x_0) > 0.$$

Obtenemos así que F_1 tiene un mínimo en x_0 en sentido no estricto. Un proceso inductivo nos asegura que F_n tiene un mínimo en x_0 en sentido no estricto para todo $n \in \mathbb{N}$.

(ii) se sigue fácilmente a partir de (i). #

Cuando x_0 no es un punto crítico de f, pueden ocurrir dos casos: f es estrictamente convexa en x_0 o f es convexa en x_0 en sentido no estricto.

Teorema 3.5.

Sea f una función estrictamente convexa en x_0 con $f'(x_0)\neq 0$, así se tiene

(i) Si se verifica que

$$\sum_{k=0}^{n} \varphi'(y_0)^k \underset{(a)}{>} \left[- \frac{\varphi'(y_0)\, f''(x_0)}{\varphi''(y_0)\, f'(x_0)^2}\right] \underset{(b)}{>} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi'(y_0)^k$$

entonces F_n es estrictamente convexa en x_0 y F_{n+1} es estrictamente cóncava en x_0. Por tanto f es n - φ - convexa y no es (n+1) - φ - convexa.

(ii) Si $\left[- \frac{\varphi'(y_0)}{\varphi''(y_0)}\right] \frac{f''(x_0)}{f'(x_0)^2} = \sum_{k=0}^{n-1} \varphi'(y_0)^k$ entonces s f es (n-1)- φ- – convexa en x_0.

Además F_{n-1} es estrictamente convexa en x_0, y F_{n+1} es estrictamente cóncava en x_0.

Demostración:

De la parte (ii) del Teorema 3.3., se sigue fácilmente que

$$\frac{F_n''(x_0)}{\varphi''(y_0)\varphi'(y_0)^{n-1} f'(x_0)^2} = \sum_{k=0}^{n-1} \varphi'(y_0)^k + \frac{\varphi'(y_0)\, f'(x_0)}{\varphi''(y_0)\, f'(x_0)^2} < 0, \quad \text{por (b)}$$

y como el denominador es menor que cero se sigue que $F''_n(x_0) > 0$ y por tanto F_n es una función estrictamente convexa.

Análogamente al caso anterior, se comprueba fácilmente que

$$\frac{F''_{n+1}(x_0)}{\varphi''(y_0)\varphi'(y_0)^n f'(x_0)^2} = \sum_{k=0}^{n} \varphi'(y_0)^k + \frac{\varphi'(y_0) f''(x_0)}{\varphi''(y_0) f'(x_0)^2} > 0 \text{ , por (a)}$$

y como $F''_{n+1}(x_0) < 0$, entonces F_{n+1} es una función estrictamente cóncava. Esto prueba (i).

Para probar (ii) deducimos de las hipótesis que

$$F''_{n-1}(x_0) = -\varphi''(y_0)\varphi'(y_0)^{2n-3} f'(x_0)^2 > 0 \text{ y por ser } \varphi''(y_0) < 0 \text{ ,}$$

obtenemos que F_{n-1} es estrictamente convexa.

Como $F''_n(x_0) = 0$ y $F''_{n+1}(x_0) = \varphi''(y_0)\, \varphi'(y_0)^{2n} f'(x_0)^2 < 0$ se

sigue que F_{n+1} es una función estrictamente cóncava. #

Este último resultado nos permite afirmar que la cantidad

$$\left[- \frac{\varphi'(y_0) f''(x_0)}{\varphi''(y_0) f'(x_0)^2}\right] \text{ y su relacion con } s = \sum_{k=0}^{n-1} \varphi'(y_0)^k \text{, establece el}$$

φ - grado de convexidad de f en x_0. Como este viene definido por el número natural n tal que F_n sea convexa y F_{n+1} no lo sea, teniendo en cuenta los diferentes valores de s parece natural normalizar el operador φ de manera que $\varphi'(y_0) = 1$. Esta normalización no cambia las propiedades geométricas de φ, es decir, φ es creciente y cóncava en un entorno W de y_0.

Por otra parte, en esta situación, nuestra interpretación geométrica del φ-grado de convexidad en relación con la curvatura es clara. Dado el operador φ en las condiciones indicadas, consideremos $\psi(y) = \varphi(y)/\varphi'(y_0)$ y repetimos el proceso anterior para este operador ψ, entonces calculando las correspondientes

sucesiones $H_n(x) = \psi o K_{n-1}(x)$ donde $K_n(x) = N[H_n](x)$, $H_1(x) = \psi \circ f(x)$ y $K_1(x) = N[H_1](x)$, obtenemos el siguiente resultado análogo al Teorema 3.5.

Corolario 3.6.

Sea f una función estrictamente convexa en x_0, con $f'(x_0) \neq 0$, así se tiene

(i) Si se verifica que

$$n+1 > [\frac{-1}{\psi''(y_0)}] \frac{f''(x_0)}{f'(x_0)^2} > n \quad .$$

Entonces H_n es estríctamente convexa en x_0 y H_{n+1} es estrictamente cóncava en x_0. Por tanto f es n- ψ -convexa y no es (n+1) - ψ -convexa.

(ii) Si $[-\frac{1}{\psi''(y_0)}] \frac{f''(x_0)}{f'(x_0)^2} = n$, entonces f es una función (n-1) - ψ -convexa, siendo la convexidad de H_{n-1} y la concavidad de H_{n+1} estrictas en x_0. #

Por otra parte, en relación con la curvatura, se prueba que

$K(f)(x_0) > K(H_1)(x_0) > K(H_2)(x_0) >...> K(H_n)(x_0) \geq 0 > K(H_{n+1})(x_0) >...$

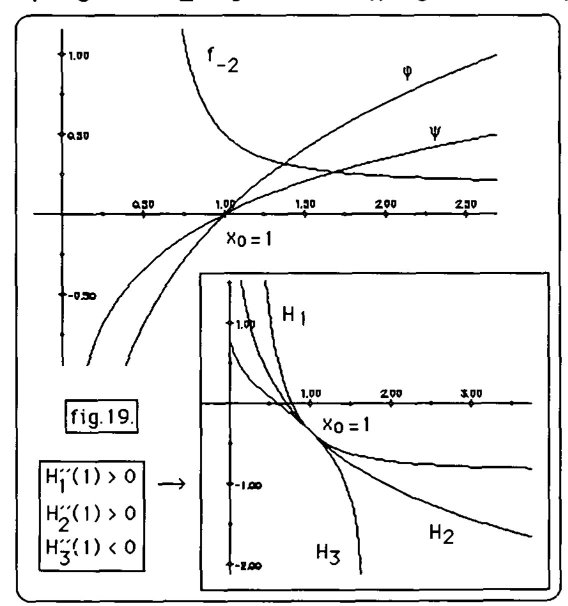


fig.19.

Ejemplo 3.3.

Consideremos la familia de funciones convexas

$f_m(x) = (1/2) \exp (x^m-1)$ para $m \in R-\{(0,1)\}$ y $x_0 = 1$. Si tomamos $\varphi(y) = \log y$ entonces $y_0 = f(x_0) = 1/2$ y $\psi(y) = (\log y)/2$.

En estas condiciones obtenemos $[-\frac{1}{\psi''(y_0)}]\frac{f''_m(x_0)}{f'_m(x_0)^2} = 2 - \frac{1}{m}$.

Al variar m obtenemos valores diferentes para esta cantidad. Estos valores nos dicen qué términos de la sucesión $\{H_n\}$ son funciones convexas. Por ejemplo si tomamos m = -2, (fig.19) entonces obtenemos que H_1 y H_2 son convexas y H_3 es cóncava.

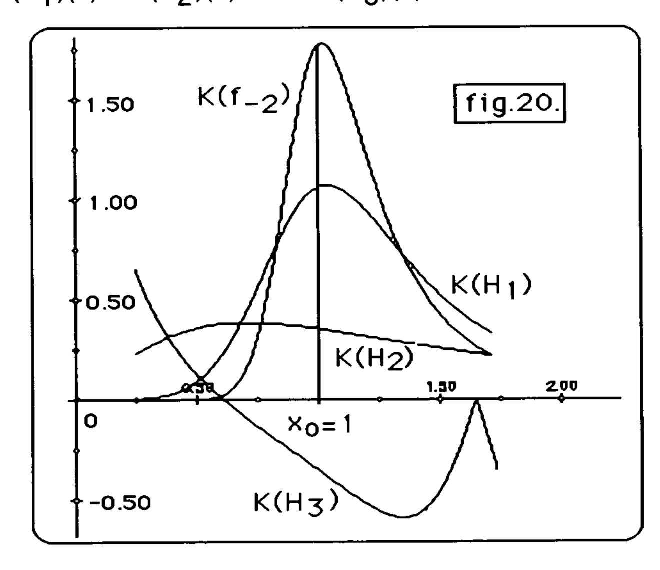
$$H_1(x) = \frac{1}{2}[\frac{1}{x^2} - 1 - \log 2] \qquad K_1(x) = \frac{1}{2x^2}$$

$$H_2(x) = -\frac{\log 2}{2} - \log x \qquad K_2(x) = \frac{1}{2} - \log x$$

$$H_3(x) = \frac{1}{2}\log [\frac{1}{2} - \log x]$$

Además se observa (fig. 20.), que

$K(f)(1) > K(H_1)(1) > K(H_2)(1) > 0 > K(H_3)(1)$.



Así, podemos definir

Definición 3.7.

Llamaremos φ-grado de convexidad de f en x_0 al número real dado por la expresión

$$(3.5.)\quad U_\varphi[f](x_0) = [\frac{-1}{\psi''(y_0)}]\frac{f''(x_0)}{f'(x_0)^2}$$

si x_0 no es un mínimo de f . En otro caso $U_\varphi(f)(x_0) = +\infty$.

Haciendo unos pequeños cálculos obtenemos

$$(3.6)\quad U_\varphi[f](x_0) = [-\frac{\varphi'(y_0)}{\varphi''(y_0)}]\frac{f''(x_0)}{f'(x_0)^2}.$$

Notas :

Esta cantidad nos da la medida de la convexidad antes de normalizar. Por tanto es claro que la normalización anterior no afecta nuestro estudio, sólamente lo simplifica.

Además podemos notar que $U_\varphi[f](x_0) \in [0, +\infty)$ y no está acotado, como muestra el siguiente ejemplo

Ejemplo 3.4.

Sea la familia de funciones $f_n(x) = (-1/n)\log nx$ en $[0,1]$, con $n \in \mathbb{R}_+$, y consideremos la familia de operadores $\varphi_m(x) = 2 + x - mx^2/2$, con $m \in \mathbb{R}_+$. Si tomamos $x_0 = 1/n$, entonces $y_0 = f(x_0) = 0$ y $U_{\varphi_m}[f](\frac{1}{n}) = \frac{n}{m}$.

De la Definición 3.7. se deducen las primeras propiedades de este índice de medida de la convexidad

Corolario 3.8.

Con la notación anterior, se verifica que

(i) Para cada número real r, se tiene

a) Si denotamos $k = \dfrac{\psi''(y_0)}{\psi''(r+y_0)}$, entonces

$U_\varphi [r+f](x_0) = k\, U_\varphi [f](x_0)$.

b) Si $r > 0$ y denotamos $k = \dfrac{\psi''(y_0)}{\psi''(r\,y_0)}$, entonces

$U_\varphi [r.f](x_0) = (k/r)\, U_\varphi [f](x_0)$.

(ii) Si 1/f es convexa en (a,b), entonces

$$U_\varphi[\tfrac{1}{f}](x_0) = \frac{-y_0}{\psi''(\frac{1}{y_0})}\,[2 + \psi''(y_0)\, y_0 U_\varphi[f](x_0)]\ .$$

(iii) $U_\varphi [f](x_0) \geq 0$. Además, $U_\varphi [f](x) = 0$ en W sí y sólo sí f es afín en W, es decir, $f(x) = mx + d$ con $m,d \in \mathbb{R}$.

(iv) Sea g una función en las mismas condiciones que f, tal que gof esté definida, entonces

$$U_\varphi[g\circ f](x_0) = U_\varphi[g](f(x_0)) + \frac{1}{g'(f(x_0))}\ \frac{\psi''(f(x_0))}{\psi''(g(f(x_0)))}\ U_\varphi[f](x_0)\ .$$

#

3.3. Grado de Convexidad.

Finalmente queremos obtener un indice de convexidad referente a todos los operadores cóncavos. Para ello si normalizamos el operador φ por la transformación

$$\varphi^*(y) = \frac{\varphi(y) - [\varphi'(y_0) + \varphi''(y_0)]\, y}{[- \varphi'(y_0)]} .$$

obtenemos un nuevo operador φ^* de las mismas características geométricas que φ, con $(\varphi^*)'(y_0) = 1$ y $(\varphi^*)''(y_0) = -1$. Por tanto, de (3.6.) obtenemos

$$U_{\varphi^*}[f](x_0) = \frac{f''(x_0)}{f'(x_0)^2}$$

Así, definimos el grado de convexidad de f en x_0, como el número real positivo dado por la expresión

$$(3.7.) \qquad U[f](x_0) = \frac{f''(x_0)}{f'(x_0)^2}$$

si x_0 no es un mínimo para f. En este caso $U[f](x_0) = +\infty$.

Es fácil probar las siguientes propiedades de este grado de convexidad

Corolario 3.9.

Se verifica que

(i) Para todo número real r se tiene

a) $U[r + f](x_0) = U[f](x_0)$, es decir, U[f] es invariante por traslaciones.

b) Si $r \in R_+$, entonces $U[r.f](x_0) = U[f](x_0)/r$.

(ii) Si 1/f es convexa en (a,b), entonces

$U[1/f](x_0) = f(x_0)\,[2 - f(x_0)\, U[f](x_0)]$.

(iii) $U[f](x_0) \geq 0$ y además $U[f](x) = 0$ en (a,b) sí y sólo sí f es afín, es decir, $f(x) = mx + d$ con $m, d \in \mathbb{R}$.

(iv) Si f y g son dos funciones crecientes, se verifica que

$U[f + g](x_0) \leq U[f](x_0) + U[g](x_0)$.

(v) Si f y g son dos funciones crecientes, tales que gof está definida, entonces

$U[g \circ f](x_0) = U[g](f(x_0)) + [1/g'(f(x_0))]\, U[f](x_0)$.

Estos resultados nos permiten afirmar que U[f] es una buena medida de la convexidad en cada punto, [19].

3.4. Grado de Concavidad.

Si consideramos una función cóncava f en un entorno del punto x_0, y φ un operador convexo en un entorno de $y_0=f(x_0)$, podemos realizar un proceso similar al que hemos hecho para definir el grado de convexidad, y obtenemos así el φ-grado de concavidad de f en x_0, dado por la expresión

$$\cap_{\varphi}[f](x_0) = \frac{\varphi'(y_0)}{\varphi''(y_0)}\left[-\frac{f''(x_0)}{f'(x_0)^2}\right]$$

Como indicamos en el caso del φ-grado de convexidad, normalizando el operador φ obtenemos un índice de medida de la concavidad de f en x_0. Este vendrá dado por el número real positivo obtenido por la expresión

$$\text{(3.8.)} \qquad \cap[f](x_0) = -\frac{f''(x_0)}{f'(x_0)^2}$$

si x_0 no es un máximo. En este caso $\cap[f](x_0) = +\infty$.

Geométricamente, si f tiene las condiciones indicadas podríamos definir el grado de concavidad de f en x_0 como el grado de convexidad de -f en x_0. Ya que de (3.7.) y (3.8.) obtenemos

$$\text{(3.9.)} \qquad \cap[f](x_0) = U[-f](x_0)\,.$$

Por otra parte, se sigue de (1.9.) que el grado de concavidad de f en x_0 va a tener las mismas propiedades que el grado de convexidad de f en x_0, como hemos visto en el Corolario 3.9.

Tema II

La Concavidad y la Convexidad en la Convergencia de Procesos Iterativos

INTRODUCCIÓN

Uno de los problemas matemáticos que suelen aparecer, con más frecuencia en la práctica, es la resolución de una ecuación f(x)=0. Aunque en algún caso muy sencillo haya procedimientos de resolución directa de esta ecuación, en general, nos veremos obligados a recurrir a procesos iterativos que nos permitan ir obteniendo valores, que se espera, sean cada vez más próximos a la solución. A partir de estos valores, mediante nueva aplicación del proceso iterativo, obtenemos otro valor más próximo a la solución de la ecuación y así sucesivamente. La gran mayoría de estos procesos iterativos se basan en la transformación de la ecuación original, anteriormente citada, en otra equivalente del tipo x=F(x). La forma de obtener F depende de cada método particular. Una vez obtenida dicha función se construye una sucesión de la forma $x_{n+1}= F(x_n)$, la cual nos debe proporcionar sucesivas aproximaciones a la solución de la ecuación f(x) = 0 [7] y [12]. Por tanto, transformamos un problema de resolución de una ecuación en un problema de cálculo de puntos fijos.

En el primer Capítulo de este Tema analizamos los métodos iterativos de Whittaker y de Newton-Raphson para la resolución de ecuaciones. Comenzamos recordando algunas generalidades acerca de dichos métodos. Posteriormente estudiamos la convergencia de estos métodos iterativos utilizando los grados de concavidad exponencial y de convexidad logarítmico respectivamente. Además, mediante estos conceptos, indicamos posibles procedimientos para aumentar la velocidad de convergencia de dichos métodos iterativos.

En el segundo Capitulo de este Tema vamos a estudiar la convergencia de algunos procesos iterativos de tercer orden [22], es decir con convergencia cúbica, para la resolución de la ecuación no lineal f(x) = 0. Este estudio lo realizamos a partir de la convexidad de la curva y = f(x). Para medir esta convexidad utilizamos el grado de convexidad logarítmico de la función f. El hecho de utilizar esta medida de la convexidad se debe a obtener una mayor simplificación operacional, si bien resulta evidente que se puede realizar un estudio análogo utilizando el grado de convexidad de f, ya que $L_f(x) = f(x)U[f](x)$.

El resultado de Gander [5] en el que se prueba que todo proceso iterativo de la forma

$$x_{n+1}= F(x_n) = x_n - H(L_f(x_n))\ f(x_n)/f'(x_n)$$

donde $H(0)=1$, $H'(0) = 1/2$ y $|H''(0)| < +\infty$, tiene convergencia cúbica, nos lleva a expresar los procesos iterativos de tercer orden en función del grado de convexidad logarítmico de la función f. Así, se puede comprobar que los procesos iterativos usuales de tercer orden, el método de Chebyshev [4] y el método de Halley [5], admiten una expresión de este tipo. Por ello, damos resultados de convergencia de estos métodos imponiendo condiciones sobre L_f y $L_{f'}$, es decir sobre las derivadas segunda y tercera de la función f, lo que es habitual para asegurar la convergencia de procesos iterativos de tercer orden.

CAPÍTULO I

LA CONCAVIDAD Y LA CONVEXIDAD EN LA CONVERGENCIA DE PROCESOS ITERATIVOS DE ORDEN MENOR QUE TRES

1.1. El método de Whittaker

1.1.1. Generalidades

El método de Whittaker es un proceso iterativo que surge como consecuencia del Teorema del Punto Fijo [15]. Es conocido que si F: $[a,b] \rightarrow [a,b]$ es una aplicación contractiva, y partimos de un punto x_0 arbitrario de [a,b], la sucesión dada por $x_n = F(x_{n-1})$ converge al único punto fijo de F. Así, si consideramos una ecuación de la forma $F(x) = x$ equivalente a $f(x) = 0$ en [a,b] trasladamos el problema de resolución de la ecuación $f(x) = 0$ a un problema de cálculo del punto fijo de un operador F. Es claro que, si f: $[a,b] \rightarrow \mathrm{R}$ es una aplicación que se anula para un único punto de [a,b], podemos definir F: $[a,b] \rightarrow \mathrm{R}$ de manera que $F(x) = x-\lambda f(x)$, para $\lambda \neq 0$ y la solución de $f(x) = 0$ será el único punto fijo del operador F. Así el método de Whittaker consiste en determinar valores de λ, distintos de cero, para los cuales la aplicación F sea contractiva y F(x) pertenezca al intervalo [a,b] para todo punto $x \in [a,b]$. Entonces estamos en disposición de hallar el único punto fijo de F en [a,b], que será la única raíz de f en dicho intervalo.

Así, como hemos indicado anteriormente, construimos la sucesión $\{x_n\}$ dada por la expresión

$$(1.1) \qquad x_n = F(x_{n-1}) = x_{n-1} - \lambda f(x_{n-1}) \text{ con } x_0 \in [a,b].$$

A continuación nos planteamos el estudio de condiciones suficientes para que la sucesión $\{x_n\}$, dada por (1.1), sea convergente a s, única raíz de la ecuación $f(x) = 0$ en [a,b].

El resultado siguiente nos proporciona condiciones, que debe verificar f, para poder aplicar el método de Whittaker, obteniendo una sucesión $\{x_n\}$ convergente

a s. Además nos indica cómo determinar los valores de λ para los cuales se verifica dicha convergencia, su demostración puede verse en [11].

Teorema 1.1.

Sean $f \in C^{(1}([a,b])$, $f(a)f(b) < 0$, $f'(x) \neq 0$ en $[a,b]$, $\{x_n\}$ la sucesión dada por (1.1), con $f(x_0) > 0$, $M = \text{máx.}\{|f'(x)| \mid x \in [a,b]\}$ entonces

i) Si f es creciente tenemos que

a) para $\lambda \in (0, 1/M]$ la sucesión $\{x_n\}$ es decreciente a s.
b) para $\lambda \in (1/M, 2/M)$ la sucesión $\{x_n\}$ converge a s pero no sabemos su forma.

ii) Si f es decreciente tenemos que

a) para $\lambda \in (-1/M, 0)$ la sucesión $\{x_n\}$ es creciente a s.

b) para $\lambda \in (-2/M, -1/M]$ la sucesión $\{x_n\}$ converge a s pero no sabemos su forma. #

Notar que la elección de $x_0 \in [a,b]$ puede hacer variar el carácter creciente o decreciente de la sucesión.

Otro tipo de condiciones de convergencia, así como el análisis del error y orden de convergencia del método pueden verse en [13].

El Teorema 1.1 nos proporciona los valores de λ para los que la sucesión $\{x_n\}$ dada por (1.1) es convergente. A continuación, queremos determinar, en los casos en que la sucesión sea decreciente o creciente, los valores de λ que nos proporcionen una situación óptima del método de Whittaker. Así, siguiendo con la notación de dicho teorema, obtenemos el siguiente resultado

Teorema 1.2.

Sean λ y μ dos números reales, $x_n = x_{n-1} - \lambda f(x_{n-1}) = F(x_{n-1})$ e $y_n = y_{n-1} - \mu f(y_{n-1}) = G(y_{n-1})$ con $x_0 = y_0$

i) Si f es creciente en $[a,b]$ y $0 < \mu < \lambda \leq 1/M$ entonces la sucesión $\{x_n\}$ converge a s más rápidamente que la $\{y_n\}$.

ii) Si f es decreciente en $[a,b]$ y $-1/M \leq \lambda < \mu < 0$ entonces la sucesión $\{x_n\}$ converge a s más rápidamente que la $\{y_n\}$. #

La demostración de este resultado quede verse en [11]. Como consecuencia, podemos deducir que a mayores valores de $|\lambda|$ la sucesión obtenida tiene mayor velocidad de convergencia.

1.1.2. La Concavidad en la Convergencia del método de Whittaker

A continuación vamos a efectuar un estudio del método de Whittaker mediante el grado de concavidad exponencial de f. Para ello consideramos en todo momento $f \in C^{(m}([a,b])$ con $m \geq 2$, f una función decreciente y cóncava. Si f fuera creciente bastaría con efectuar el cambio de f(x) por f(-x).

También elegimos $x_0 \in [a,b]$ con $f(x_0) > 0$, en otro caso los resultados serán análogos.

Comenzamos este estudio probando un resultado de convergencia global para el proceso iterativo de Whittaker, en función del grado de concavidad exponencial de f. Si bien este resultado no posee gran interés práctico, dado que sus hipótesis son excesivas respecto del Teorema 1.1, sí posee interés teórico ya que dichas hipótesis se expresan mediante el grado de concavidad exponencial de la función. Además este resultado acota los posibles valores del parámetro λ en función del grado de concavidad exponencial de la función f.

Teorema 1.3.

Sea f en las condiciones indicadas verificando que $1/|f'(a)| \leq b-a$, si $\lambda \in \mathbb{R}_-$ y $E_f(x) \geq \lambda f'(b)$ para $x \in [a,b]$ entonces la sucesión $\{x_n\}$ dada por (1.1), con $x_0 \in [a,b]$ y $f(x_0)>0$, converge de forma creciente a la única raíz de $f(x) = 0$ en [a,b].

Demostración:

La estructura de esta demostración va a ser análoga a la del Teorema 1.1. Aquí $f(a) > 0 > f(b)$.

a) Probemos, por inducción sobre n, que $x_n \leq s$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Como $f(x_0) \geq 0$, entonces $x_0 \leq s$ y por tanto $x_1 - s = F(x_0) - F(s)$, con $F(x) = x - \lambda f(x)$.

Por el Teorema del Valor medio, existe $\theta_0 \in (s, x_0)$ tal que $x_1 - s = F'(\theta_0)(x_0 - s)$ $=[1 - \lambda f'(\theta_0)](x_0 - s)$.

Si probamos que $\lambda f'(\theta_0) < 1$, como $x_0 - s \leq 0$, es claro que $x_1 - s \geq 0$. Para probar esto, como $E_f(x) > \lambda f'(b)$ para $x \in [a,b]$, se tiene que

$$I = \int_a^b E_f(t)dt = \frac{1}{f'(b)} - \frac{1}{f'(a)} \geq \int_a^b \lambda f'(b)dt = \lambda f'(b)\,(b-a)$$

por otra parte

$$I = \frac{1}{f'(b)} - \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{|f'(a)|} - \frac{1}{|f'(b)|} < \frac{1}{|f'(a)|} < b - a, \text{ pues } 0 > f'(a) > f'(b),$$

luego $\lambda f'(b)(b-a) < b-a$.

Entonces como f' es decreciente, $f'(b) < f'(\theta_0)$ y $\lambda < 0$ se sigue que

$$\lambda f'(\theta_0) < \lambda f'(b) < \frac{b-a}{b-a} = 1$$

Suponiendo cierto que $x_{n-1} \leq s$, probémoslo para x_n. $x_n - s = F(x_{n-1}) - F(s) = F'(\theta_{n-1})(x_{n-1} - s) = [1 - \lambda f'(\theta_{n-1})](x_{n-1} - s)$ para $\theta_{n-1} \in (s, x_{n-1})$. Como en el caso anterior, basta probar que $\lambda f'(\theta_{n-1}) < 1$ y como $\lambda f'(\theta_{n-1}) < \lambda f'(b) < 1$, se sigue que $x_n \leq s$.

b) Veamos que la sucesión $\{x_n\}$ es decreciente

$x_{n-1} - x_n = \lambda f(x_{n-1}) < 0$ al ser $\lambda < 0$ y $f(x_{n-1}) > 0$.

c) Luego la sucesión $\{x_n\}$ es creciente y acotada, por tanto tiene limite, sea este p. Entonces pasando al límite en (1.1) tenemos que $p = p - \lambda f(p)$, luego $f(p) = 0$ y por tanto $p=s$. #

Como hemos comentado anteriormente, este teorema sólo tiene un interés teórico pues la acotación obtenida $\lambda \geq E_f(x)/f'(b)$ es peor que la obtenida anteriormente si $E_f(x) \leq 1$. Por otra parte, en el caso de que $E_f(x) > 1$ va a ser incompatible con las hipótesis del teorema, ya que si consideramos f como habitualmente y suponemos que $E_f(x) = k > 1$, entonces

$$b - a < k(b - a) = \int_a^b E_f(t)dt = \frac{1}{f'(b)} - \frac{1}{f'(a)} < \frac{1}{|f'(a)|},$$

de lo que podemos deducir que no se puede encontrar un intervalo [a,b] en el que $1/|f'(a)| \leq b-a$ y a la vez el grado de concavidad exponencial de f sea mayor que uno. A continuación damos un ejemplo de esta situación, así como del caso en que sí podemos aplicar el teorema, poniendo de manifiesto que obtenemos peor acotación para los valores del parámetro λ que en el Teorema 1.1.

Ejemplo 1.1.

(i) Estudiemos la función f dada por f(x) = log(1-2x)/2, (fig.21) $f \in C^{(2}((-\infty,1/2))$ y $[a,b] \subset (-\infty, 1/2)$ tal que a<0 y b>0

$$f'(x) = \frac{1}{2x-1}; \qquad f''(x) = \frac{-2}{(2x-1)^2}; \qquad E_f(x) = -\frac{f''(x)}{(f'(x))^2} = 2$$

Vemos que la función es cóncava, decreciente y que su grado de concavidad es dos. Por tanto, según lo visto en la nota previa, no se podrá aplicar el teorema anterior. En este caso, el que $1/|f'(a)| \leq b-a$ es equivalente a que $1 \leq b + a$ y como $a < 0$ se sigue que $b > 1$, con lo cual no es posible, como ya habíamos indicado, aplicar el teorema anterior.

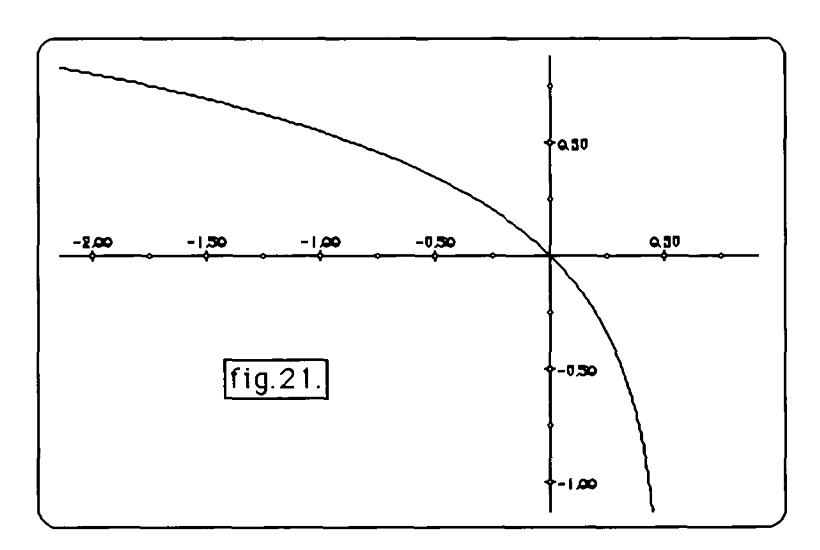
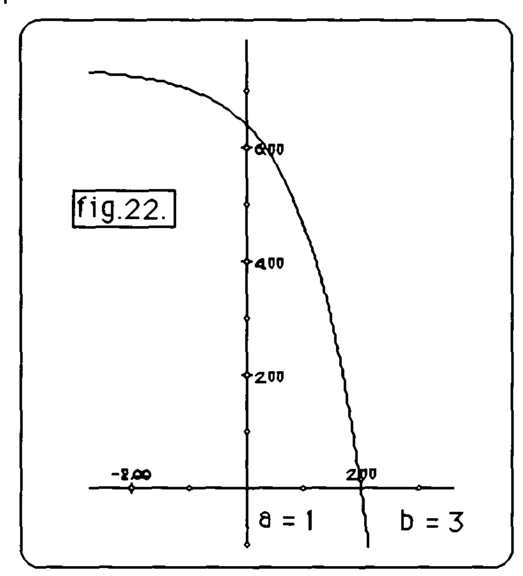


fig.21.

(ii) Consideremos la función $f(x) = e^2 - e^x$ y $[a,b] = [1,3]$. (fig.22.).

Entonces es claro que $1/|f'(a)| = e^{-a} \leq 2 = b - a$ y $E_f(x) = 1/e^x < 1$ en [1,3], luego si $\lambda f'(b) \leq E_f(x)$ en [1,3], es decir, $\lambda(-e^3) \leq e^{-x}$ para $x \in [1,3]$. Entonces, por el resultado anterior, el método de Whittaker es convergente a la raíz s = 2. Ahora bien, según lo indicado ha de verificarse que $0 > \lambda \geq -e^{-6}$, mientras que el Teorema 1.1. nos permite considerar $-2\,e^{-3} \leq \lambda \leq 0$. Luego la acotación dada por el Teorema 1.3 es menos fina que la que nos proporciona el Teorema 1.1, teniendo en cuenta que el método de Whittaker posee mayor velocidad de convergencia para mayores valores de $|\lambda|$.

La convergencia del proceso iterativo de Whittaker es lineal. A continuación estudiamos la influencia que tiene la concavidad de la función f en la velocidad de convergencia de la sucesión $\{x_n\}$, estudio que realizamos mediante el grado de concavidad exponencial de la función.



Teorema 1.4.

Si g es una función en las mismas condiciones que f, siendo $E_g(x) < E_f(x)$ en [a,b], entonces existe k = máx.{1,f'(b)/g'(b)} de manera que la función h(x) = kg(x), nos proporciona una sucesión $y_n = y_{n-1} - \lambda\, h(y_{n-1})$, con $y_0 = x_0$, que converge de forma creciente a s para $0 > \lambda \geq$ máx.$\{ [g'(b)]^{-1}, [f'(b)]^{-1} \}$. Además se verifica que $\{y_n\}$ converge más rápidamente a s que $\{x_n\}$, es decir $y_n > x_n$ para cualquier $n \in N$.

Demostración :

Como f y g son cóncavas y decrecientes, las sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ convergen a s y son crecientes para el valor de λ considerado. Entonces veamos que $y_n > x_n$ por inducción.

Supongamos que $g'(b) \leq f'(b)$, $x_1 - y_1 = \lambda\,[g(x_0) - f(x_0)]$, ahora bien $E_g(x) < E_f(x)$ en [a,b] luego se verifica

$$\int_x^b [E_f(t) - E_g(t)]dt > 0 \iff \frac{1}{g'(x)} - \frac{1}{f'(x)} > \frac{1}{g'(b)} - \frac{1}{f'(b)} > 0.$$

Entonces $g'(x) < f'(x)$ en (a,b), de donde se sigue que para $x \in (a,s)$

$$\int_x^s [f'(t) - g'(t)]dt > 0, \quad \text{luego} \quad g(x) > f(x) \quad \text{en} \quad (a,s)$$

y por tanto $g(x_0) > f(x_0)$ y como $\lambda < 0$ se sigue que $x_1 < y_1$.

Supongamos que $y_k > x_k$ para k=1,2,..., n-1, entonces si llamamos $G(x) = x - \lambda h(x)$, como $F'(x) \geq 0$ al ser $\lambda \geq 1/f'(b)$ tenemos que $x_n - y_n = F(x_{n-1}) - G(y_{n-1}) \leq F(y_{n-1}) - G(y_{n-1}) = \lambda[g(y_{n-1}) - f(x_{n-1})] \leq 0$, al ser $\lambda < 0$ y $g(y_{n-1}) \geq f(x_{n-1})$, luego, $x_n < y_n$.

Si $g'(b) > f'(b)$, como $k = f'(b)\,[g'(b)]^{-1}$, consideraremos $h(x) = k\,g(x)$ que verifica $E_h(x) = g'(b)\,[f'(b)]^{-1} E_g(x) < E_g(x) < E_f(x)$ en [a,b] por ser $g'(b)\,[f'(b)]^{-1} < 1$. Además $h'(b) = f'(b)$, entonces aplicando la situación anterior a la función h queda probado el resultado. #

Ejemplo 1.2.

Consideramos las funciones $f(x) = 1 - x^3/216$, $g(x) = 1 - x^2/36$. (fig. 23.). Vemos que ambas tienen las mismas caracteristicas en [5,7] , además de la misma raíz s=6. Tenemos que

$f'(x) = -x^2/72$; $f''(x) = -x/36$; $E_f(x) = 144/x^3$

$g'(x) = -x/18$; $g''(x) = -1/18$; $E_g(x) = 18/x^2$

luego las dos funciones son cóncavas y decrecientes en dicho intervalo , además se verifica

$$E_g(x) = 18/x^2 < 144/x^3 = E_f(x) \Leftrightarrow 18\,x < 144 \Leftrightarrow x < 8$$

Por otra parte $f'(b) = f'(7) = -49/72$ y $g'(b) = g'(7) = -7/18$ luego $k = 7/4 > 1$. Vemos que, aún teniendo menor grado de concavidad la función g que f, la aproximación es mejor con f. (Tabla.1.)

Esto se corrige, procediendo como indica el teorema anterior, definiendo la función $h(x) = f'(7)\,[g'(7)]^{-1}\,g(x) = (7/4)\,g(x)$. (Tabla. 2.).

También es interesante notar que la relación dada entre los grados de concavidad exponencial de f y g, sólo es necesaria en (a,s), es decir, donde se toma x_0. Ahora bien, como s es un punto desconocido, lo exigiremos en todo [a,b], teniendo en cuenta la posible variabilidad del punto b

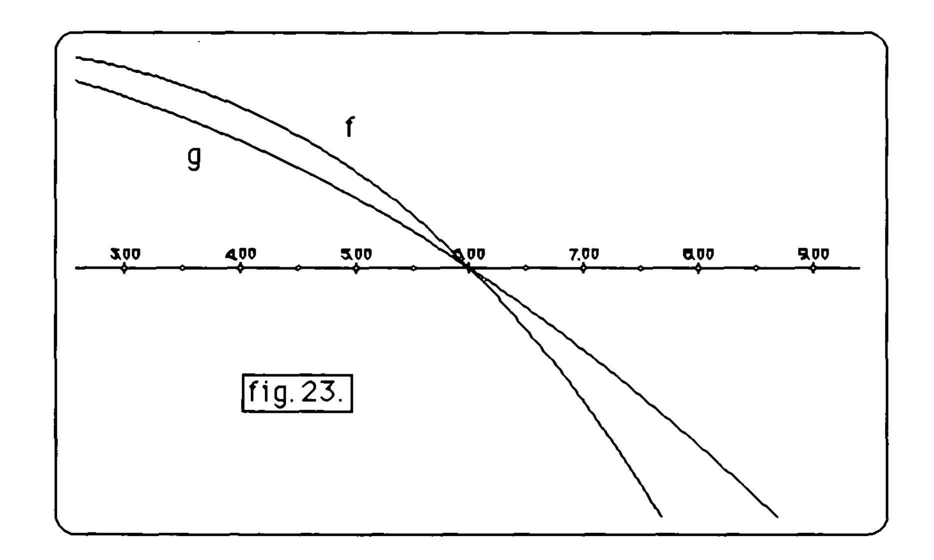


fig. 23.

TABLA . 1 .

iter.	f	g
1	7	7
2	6.136054421768700	6.4693877551021
3	6.033812309317900	6.2304906969036
4	6.008830357183800	6.1154288877524
5	6.002333195155500	6.05834845995
6	6.000618344285500	6.0296306614936
7	6.000164003704800	6.0150818486762
8	6.000043507893500	6.0076855365834
9	6.000011542678700	6.0039187812172
10	6.000003062326900	6.001998751362
11	6.000000812453000	6.0010196080416
12	6.000000215548600	6.0005201657518
13	6.000000057186400	6.000265379646
14	6.000000015171900	6.000135394904
15	6.000000004025100	6.0000690782844

TABLA . 2 .

iter.	h
1	7
2	6.0714285714286
3	6.0098396501456
4	6.0013987486841
5	6.0001996814908
6	6.0000285230792
7	6.0000040746674
8	6.0000005820942
9	6.0000000831563
10	6.0000000118794
11	6.0000000016971
12	6.0000000002424
13	6.0000000000346
14	6.000000000005
15	6.0000000000006

Otra cuestión interesante, como ya vimos anteriormente, es la optimización del método. Es conocido, que a mayor valor del parámetro en valor absoluto, el método proporciona una más rápida aproximación. Este resultado lo podemos obtener como una consecuencia inmediata del teorema anterior.

Corolario 1.5.

Sean λ y μ dos números reales tales que $[f'(b)]^{-1} \leq \lambda < \mu < 0$ si $x_n = x_{n-1} - \lambda f(x_{n-1})$ e $y_n = y_{n-1} - \mu\, f(y_{n-1})$ con $x_0 = y_0$ y $f(x_0) > 0$, entonces $y_n < x_n$ para cualquier $n \in N$.

Demostración :

Basta considerar la función $g(x) = (\mu/\lambda)f(x)$, la cual verifica las condiciones del teorema anterior y como $g'(b) < f'(b)$, entonces tenemos que $\{x_n\}$ converge a s más rápidamente que $\{y_n\}$, es decir, $y_n < x_n$ para cualquier $n \in N$. #

1.2. El método de Newton-Raphson.

1.2.1. Generalidades

La idea de construcción del método consiste en encontrar una aproximación de una raíz s de f, resolviendo para ello la ecuación lineal L(x) = 0, donde L es el polinomio de interpolación, en este caso de Taylor [18], construido a partir de un punto inicial x_0, el valor de la función y el valor de la derivada en dicho punto. Así el polinomio $L(x) = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0)$ interpola a f en un entorno de x_0, ahora igualando a cero y despejando tenemos

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Notemos que ha de verificarse que $f'(x_0) \neq 0$. Tomando $x_1 = x$ y repitiendo el proceso obtenemos una nueva aproximación de s que denotaremos x_2, de esta manera conseguimos una sucesión $\{x_n\}$, definida por el proceso iterativo

$$(1.2) \qquad x_{n+1} = F(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Newton fue el que originalmente dio una idea acerca de este método, pero Raphson expresó la fórmula de recurrencia por vez primera, por lo cual a este método se le denomina de Newton-Raphson.

La construcción de x_{n+1} a partir de x_n se puede ver como el punto de corte de la tangente a la curva y = f(x) en el punto $(x_n,f(x_n))$ con el eje OX. Es por ello que también se conoce este proceso iterativo como el método de la tangente.

De momento hemos construido una sucesión $\{x_n\}$, pero no sabemos si converge a la raíz s de f(x) = 0. Daremos a continuación algunos resultados que nos aseguren la convergencia del método. La demostración del primero de ellos puede verse en [16]. Denotaremos por $<x,y>$ el intervalo más pequeño que contiene a ambos puntos, es decir, [x,y] ó [y,x].

Teorema 1.6.

Sea $f : R \to R$. Consideramos $h_0 = -f(x_0)/f'(x_0)$ y un intervalo $J_0 = <x_0, x_0 + 2h_0>$, cumpliendo que $f(x_0)f'(x_0) \neq 0$ y en el que exista f". Sea también M = sup. $\{ |f''(x)| \mid x \in J_0 \}$. Entonces si

$$(1.3) \quad 2|h_0| M \leq |f'(x_0)|$$

se cumple que, tomando como punto inicial x_0, la sucesión $\{x_n\}$ definida por (1.2) está contenida en J_0 y el límite de la misma, cuando n tiende a infinito, es s (único cero en J_0 de f). Además, si $s \neq x_0 + 2h_0$, se tienen las siguientes relaciones :

$$(a) \quad \frac{|x_{n+1} - x_n|}{|x_n - x_{n-1}|^2} \leq \frac{M}{2|f'(x_n)|} \quad \text{para } n \geq 1$$

$$(b) \quad |s - x_{n+1}| \leq \frac{M}{2|f'(x_n)|} |x_n - x_{n-1}|^2 \quad \text{para } n \geq 1.$$

#

Este teorema prueba la convergencia del método sin tener en cuenta el conocimiento previo de la raíz s. En cambio, el siguiente teorema exige el conocimiento de la existencia de una solución s de f(x) = 0.

Teorema 1.7.

Sea f tal que f" sea contínua y $f'(x) \neq 0$ en J, intervalo abierto que contiene a una raíz s de f. Entonces existe $\varepsilon > 0$ cumpliendo que para todo punto inicial, perteneciente al entorno de centro s y radio ε, el método de Newton-Raphson es convergente.

Demostración :

Sea $G(x) = x - f(x)/f'(x)$, como $G'(s) = 0 < 1$, como consecuencia del Teorema del Punto Fijo [15] obtenemos que existe $\varepsilon > 0$ tal que la sucesión $x_{n+1} = G(x_n)$ converge al punto fijo de G, que es s. #

Teorema 1.8.

Sea $f(x) : [a,b] \to R$ cumpliendo:

(a) $f(a)f(b) < 0$

(b) $f'(x) \neq 0 \ \forall x \in [a,b]$

(c) $f''(x)$ no cambia de signo en [a,b]

entonces existe una única raíz s de $f(x) = 0$ en [a,b], a la cual converge la sucesión $\{x_n\}$, definida por $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$, para $x_0 \in [a,b]$ tal que $f(x_0)f''(x_0) \geq 0$.

Para su demostración ver [7]. #

Notas:

1. Las hipótesis de este teorema reciben el nombre de condiciones de Fourier, bajo las cuales podemos asegurar la convergencia del método de Newton-Raphson.

2. Si imponemos la condición $|f(c)|/|f'(c)| \leq b - a$, donde c es el extremo de [a,b] tal que $|f'(c)|$ es mínimo, entonces se puede tomar cualquier punto en [a,b] como punto inicial. En nuestro caso c = a, entonces de $|f(c)|/|f'(c)| \leq b-a$ se tiene que $b - a \geq |f(a)|/|f(b)|$, y como $f(a) < 0$ y $f'(a) \geq 0$, se sigue que $b - a \geq (-f(a))/f'(a)$. Ahora si tomamos como punto inicial $x_0 \in [a,s]$, se cumple que $-f(x_0) \leq -f(a)$ y $f'(x_0) > f'(a)$, entonces $b - a \geq (-f(a))/f'(a) \geq (-f(x_0))/f'(x_0) = x_1 - x_0 \Rightarrow b \geq x_1 - (x_0 - a) \geq x_1$, es decir que $x_1 \in [a,b]$.

Para terminar las generalizaciones relativas al método de Newton-Raphson, indicar que es un proceso iterativo cuyo orden de convergencia es al menos cuadrático [12].

Un estudio más detallado de este proceso iterativo puede verse en [8].

1.2.2. La Convexidad en el Método de Newton-Raphson

A continuación vamos a efectuar un estudio del Método de Newton-Raphson en función del grado de convexidad logarítmico de f. En este párrafo consideraremos f una función creciente, en el caso de ser una función decreciente el cambio de f(x) por f(-x) nos conduce a la situación considerada. Además tomaremos $x_0 \in [a,b]$ con $f(x_0) > 0$.

A partir de la interpretación geométrica del método de Newton-Raphson, aparece la "necesidad" de que $f''(x)$ no cambie de signo en el intervalo [a,b] para asegurar la convergencia. Entonces nos preguntamos qué ocurre si f" cambia de signo en [a,b]. En principio, pueden presentarse dos situaciones. En primer lugar, que la raíz de $f(x) = 0$ sea un punto de inflexión de f en [a,b], entonces tanto si el

punto inicial x_0 está a la derecha como si está a la izquierda de la raíz, habrá que asegurar que la sucesión $\{x_n\}$ esté contenida en [a,b]. En segundo lugar, que la raíz de f(x) = 0 no sea un punto de inflexión de f en [a,b]. Aquí, puede ocurrir que el punto inicial x_0 esté a la derecha o a la izquierda del punto de inflexión. Si por ejemplo el punto de inflexión está a la derecha de la raíz, el punto inicial x_0 puede estar comprendido entre la raíz y el punto de inflexión, en cuyo caso la convergencia de la sucesión $\{x_n\}$ a la raíz está asegurada por el Teorema 1.8. de convergencia. Si por el contrario, el punto inicial x_0 está a la derecha del punto de inflexión, entonces habrá que asegurar que la sucesión $\{x_n\}$ esté contenida en [a,b]. Situaciones análogas se pueden presentar si el punto de inflexión se encuentra a la izquierda de la raíz.

Todas estas observaciones muestran que las condiciones de Fourier son insuficientes para asegurar la convergencia del método de Newton-Raphson en el caso de que f" cambie de signo, y por tanto, la función tenga un punto de inflexión en su dominio. A continuación obtenemos un nuevo resultado de convergencia para el método de Newton-Raphson que generaliza los resultados de convergencia conocidos.

Lema 1.9.

Si $\{x_n\}$ es la sucesión dada por (1.2), $x_0 \in [a,b]$, $|L_f(x)| < 1$ en [a,b], con F(x) dada por (1.2), y $a \leq F(x_0) \leq b$, entonces $\{x_n\} \subset [a,b]$.

Demostración:

Obviamente $x_1 = F(x_0) \in [a,b]$. Además, por el Teorema del Valor Medio, tenemos que $x_2 - s = F(x_1) - F(s) = F'(x_1)(x_1 - s)$ con $x_1 \in (s, x_1)$. Por otra parte, como $|F'(x)|<1$ en [a,b] entonces existe $0<M<1$ tal que $|F'(x)|<M$ en [a,b]. Así, $|x_2 - s| < M.|x_1 - s|$ y aplicando inducción obtenemos que $|x_n - s| < M^{n-1}|x_1 - s| < |x_1 - s|$. Por lo tanto, $x_n \in [a,b]$ para todo $n \in N$. #

Teorema 1.10.

En las condiciones del Lema anterior, si $f \in C^{(m}([a,b])$ con $m \geq 2$, $f(a)f(b)<0$ y $f'(x) \neq 0$ en [a,b], entonces el proceso iterativo dado por (1.2) es convergente para cualquier $x_0 \in [a,b]$.

Demostración:

Como en el lema previo, sabemos que existe $0 < M < 1$ tal que $|x_n - s| < M^n |x_0 - s|$ en [a,b] para todo $n \in N$, luego $\lim |x_n - s| = 0$. Por lo tanto, $\{x_n\}$ es una sucesión convergente a s. #

Ejemplos 1.3.

1) Dada la función $f(x)=-x^3+3x^2-2$, buscamos una aproximación a la solución de la ecuación escalar $f(x)=0$ en el intervalo $\left[\frac{1}{10}, \frac{19}{10}\right]$. Esta puede obtenerse mediante la sucesión numérica $\{x_n\}$ dada por el método de Newton.

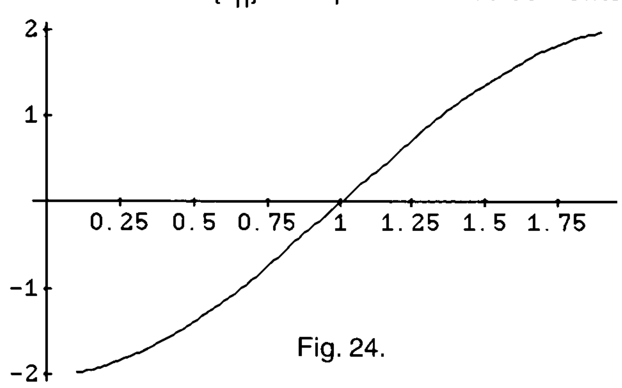


Fig. 24.

Es fácil obtener que $F'(x) = \dfrac{(6(-x^3+3x^2-2)(1-x)}{(-3x^2+6x)}$ y por tanto comprobar que $|L_f(x)|<1$ en $\left[\frac{1}{10}, \frac{19}{10}\right]$. Para comprobar que la sucesión $\{x_n\}$ está contenida en $\left[\frac{1}{10}, \frac{19}{10}\right]$, es suficiente ver por el Lema1.9 que $\frac{1}{10}\leq x_1\leq\frac{19}{10}$. Tomando por ejemplo como punto de salida x_0=1'6, es claro que x_1=0'775$\in\left[\frac{1}{10}, \frac{19}{10}\right]$. Entonces por el Teorema 1.10 resulta que el método de Newton nos proporciona una sucesión convergente a la raíz de la ecuación escalar, como puede verse en la Tabla 3.

iter.	x_n
0	1.6000000000000000
1	0.7750000000000000
2	1.0079986833443050
3	0.9999996588133421
4	1.0000000000000000

Tabla 3

Por otra parte, ver Fig. 24., la función presenta un punto de inflexión en la raíz. Por ello, esta función no verifica las condiciones de Fourier y en consecuencia no podemos asegurar su convergencia con las hipótesis habituales de convergencia [16] para este método.

2) Dada la función $f(x) = \frac{1}{2} + \text{sen } x$, buscamos una aproximación a la solución de la ecuación no lineal f(x)=0 en el intervalo $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ mediante el método de Newton. Se comprueba fácilmente que $|L_f(x)|<1$ en $[-1'00297, 0'634867] \subset \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Por lo tanto, restringimos el intervalo inicial al intervalo [-1'00297,0'634867], en el cual se verifican todas las condiciones del Teorema 1.10. Tomando por ejemplo como punto de salida x_0=0'6, es claro que x_1=-0'6899$\in$[-1'00297,0'634867].

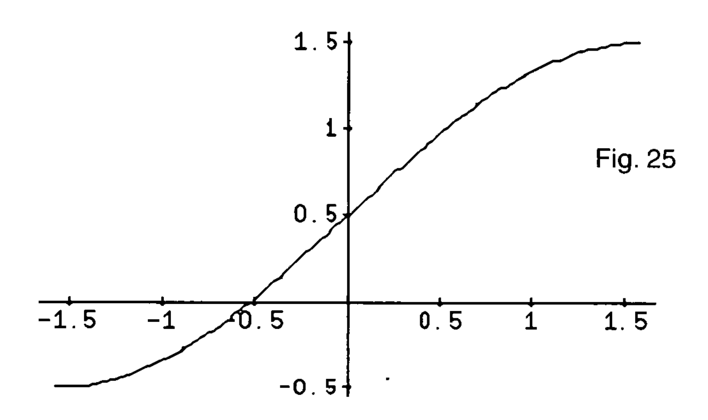


Fig. 25

Por lo tanto, por el Lema 1.9, se sigue que la sucesión $\{x_n\}$ está contenida en [-1'00297,0'634867), y, por el Teorema 1.10, el método de Newton nos proporciona una sucesión convergente a la raíz.

iter.	x_n
0	0.6000000000000000000
1	-0.6899509655978506667
2	-0.5129726247150719697
3	-0.5235667752006047706
4	-0.5235987753027045709
5	-0.5235987755982988737
6	-0.5235987755982988705
7	-0.5235987755982988742
8	-0.5235987755982988711
9	-0.5235987755982988711

Tabla 4

Notemos sin embargo, Fig. 25., que para poder aplicar las condiciones habituales de convergencia, tendríamos que restringirnos al intervalo $\left[\frac{-\pi}{2}, \alpha\right]$ con α<0.

Por tanto, hemos aumentado el dominio de los puntos de salida para la aplicación del método de Newton.

En las condiciones de Fourier, para $f''(x) \geq 0$ y $x_0 \in [a,b]$ con $f(x_0) > 0$, por el Teorema 1.10 se prueba que la sucesión $\{x_n\}$, dada por (1.2), es decreciente a la raíz s. En esta situación estudiamos a continuación la influencia que tiene la convexidad de la función en la velocidad de convergencia del método iterativo.

Sea g una función, en las mismas condiciones que f en [a,b], tal que $g(s) = 0$. Consideramos la sucesión $y_n = G(y_{n-1})$, siendo $G(y) = y - g(y)/g'(y)$ e $y_0 = x_0$. Entonces, mediante el grado de convexidad logarítmico, vamos a comparar las sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$.

Teorema 1.11.

Si $L_f(x) > L_g(x)$ para $f(x) > 0$, entonces la sucesión $\{y_n\}$ converge a s más rápidamente que $\{x_n\}$.

Demostración :

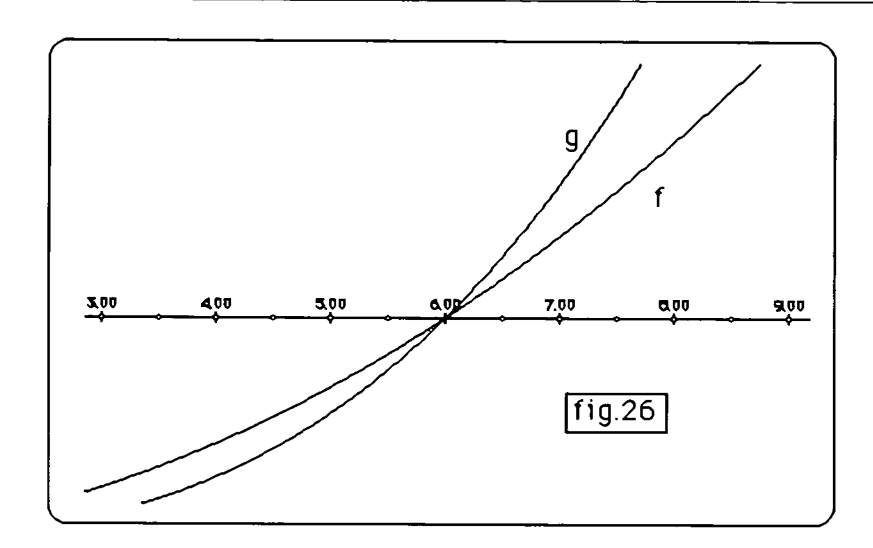
En nuestras condiciones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ son sucesiones decrecientes a s. Por tanto, mediante inducción vamos a probar que $y_n < x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \neq s$. Además $y_n = s$ si $x_{n-1} \neq s$ y $x_n = s$.

Teniendo en cuenta que $F(s) = G(s) = s$ y $x_0 \neq s$, tenemos que $x_1 - y_1 = (F - G)(x_0) - (F - G)(s)$ y, por el Teorema del Valor Medio, existe $\xi_0 \in (s, x_0)$ tal que $x_1 - y_1 = (F - G)'(\xi_0)(x_0 - s)$. Por otra parte, como $(F - G)'(x) = L_f(x) - L_g(x)$ y $f(\xi_0) > 0$ entonces obtenemos que $x_1 - y_1 > 0$.

Supongamos que $x_k > y_k$ para $k = 1, 2, \ldots, n-1$, si $x_n \neq s$ entonces $x_{n-1} \neq s$ y $x_n - y_n = F(x_{n-1}) - G(y_{n-1}) \geq (F - G)(x_{n-1})$ puesto que G es una función creciente en [s,b] e $\{y_n\} \subset [s,b]$. Por tanto, procediendo como en el caso k=1, obtenemos que se verifica $x_n - y_n > 0$.

Aplicando los argumentos utilizados anteriormente es sencillo probar que si $x_{n-1} \neq s$ y $x_n = s$ entonces $y_n = s$. #

Luego hemos probado, mediante el grado de convexidad logarítmico, que a menor convexidad de una función el Método de Newton-Raphson converge más rápidamente a la raíz de la ecuación.



Ejemplo 1.4.

Sean las funciones $f(x) = (x^3/216) -1$, $g(x) = (x^2/36)-1$.

Veamos que ambas tienen las mismas caracteristicas en [5,10], además de la misma raíz s=6.

$f'(x) = x^2/72$; $f''(x) = x /36$; $L_f(x) = (2/3) - 144/x^3$

$g'(x) = x/18$; $g''(x) =1/18$; $L_g(x) = (1/2) - 18/x^2$

vemos que las dos son convexas y crecientes en dicho intervalo, además se verifica $L_g(x) < L_f(x) \Leftrightarrow x^3 + 108 x - 864 > 0$

iter.	f	g
1	10.000000000000000	10.000000000000000
2	7.386666666666700	6.800000000000000
3	6.244023743014800	6.047058823529500
4	6.009412497423800	6.000183108262900
5	6.000014735026500	6.000000002793900
6	6.000000000036300	6.000000000000000
7	6.000000000000100	6.000000000000000

Tabla 5.

y por tanto $L_g(x) < L_f(x)$ en [5,10], luego la sucesión $\{y_n\}$ construida con la función g converge a la raíz más rápidamente que la $\{x_n\}$ construida con f. (Tabla 5).

CAPÍTULO II

LA CONVEXIDAD Y LA CONCAVIDAD EN LA CONVERGENCIA DE PROCESOS ITERATIVOS PARA LA RESOLUCIÓN DE ECUACIONES NO LINEALES

2.0. Introducción

En este segundo Capítulo realizamos un análisis de la convergencia de los dos procesos iterativos de tercer orden más utilizados, el método de Chebyshev o de la interpolación cuadrática inversa [4], [5], y el método de Halley [1], [9]. Además, a partir de estos procesos iterativos consideramos una familia uniparamétrica de procesos iterativos de tercer orden.

En lo que sigue consideraremos $f \in C^{(p}([a,b])$, $p \geq 4$, en las condiciones de Fourier, es decir, $f(a)\, f(b) < 0$, $f'(x) \neq 0$ y f'' con signo constante en [a,b], entonces existe una única raíz de

(2.1.) $\qquad f(x) = 0$

en [a,b]. En nuestro estudio podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que f es una función convexa y estrictamente creciente en [a,b], en otro caso basta cambiar $f(x)$ por $f(-x)$, $-f(x)$ o $-f(-x)$.

A lo largo de todo el Capítulo denotaremos por $m(f) = \text{mín.}\{f(x) | \ x \in [a,b]\}$ y $M(f) = \text{máx}\ \{f(x) | \ x \in [a,b]\}$.

2.1. El Método de Chebyshev.

2.1.1. Generalidades

Dada la función $y = f(x)$, denotamos $x = \varphi(y)$ a la función inversa de f. Si la aproximamos en un punto x_0, con $y_0 = f(x_0)$, entonces $\varphi(y) \sim \varphi(y_0) + \varphi'(y_0)(y - y_0) + \varphi''(y_0)(y - y_0)^2/2$.

Hallar la raíz de la ecuación $f(x) = 0$, corresponde a encontrar la imagen del cero por la función φ, es decir $\varphi(0)$. Entonces $\varphi(0) \approx \varphi(y_0) - \varphi'(y_0)\, y_0 + \varphi''(y_0)(y_0)^2/2$, por tanto tenemos que

$$(2.2.)\ s \approx x_0 - \varphi'(y_0)\, f(x_0) + \varphi''(y_0)\, f(x_0)^2/2.$$

Hallemos $\varphi'(y)$ y $\varphi''(y)$, para poder sustituir su valor en la expresión anterior.

$x = \varphi(y)$

$y' = f'(x),\ y'' = f''(x)$

$$\varphi'(y) = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{y'} = \frac{1}{f'(x)}$$

$$\varphi''(y) = \frac{d}{dy}\left(\frac{dx}{dy}\right) = \left[\frac{d}{dx}\frac{dx}{dy}\right]\left(\frac{dx}{dy}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{dx}{dy}\right).\frac{dx}{dy} =$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{y'}\right)\frac{dx}{dy} = -\frac{y''}{y'^3}$$

Sustituyendo en (2.2.), tenemos

$$s \approx x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} - \frac{f''(x_0)f(x_0)^2}{2f'(x_0)^3}$$. Entonces consideramos

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\left[1 + \frac{L_f(x_0)}{2}\right]$$

Repitiendo para este x_1 la construcción anterior obtenemos el término x_2 y por recurrencia se tiene

$$(2.3.)\quad x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}\left[1 + \frac{L_f(x_{n-1})}{2}\right]$$

que es el proceso iterativo conocido como el método de Chebyshev [4], [5].

2.1.2. Discusión de la convergencia

A continuación vamos a estudiar la convergencia de la sucesión $\{x_n\}$, dada por el proceso iterativo (2.3.).

Teorema 2.1.

Supongamos que $L_{f'}(x) \leq 3$ en [a,b]. Si $f(x_0) > 0$ entonces la sucesión $\{x_n\}$ es decreciente y converge a s.

Además, si $f(x_0) < 0$ y $L_f(x) \geq -2$ en [a,b] entonces la sucesión $\{x_n\}$ es creciente y converge a s.

Demostración:

Consideramos $x_0 \in [a,b]$ tal que $f(x_0) > 0$ y probaremos que $x_n \geq s$ para todo $n \in N$.

Como $f(x_0) > 0$ se sigue que $x_0 - s \geq 0$, por hipótesis. Además, $x_1 - s = F(x_0) - F(s) = F'(\theta_0)(x_0 - s)$ con $\theta_0 \in (s, x_0)$, y es fácil obtener que $F'(x) \geq 0$ en [a,b] si $L_{f'}(x) \leq 3$, teniendo en cuenta

$$(2.4.) \qquad F'(x) = L_f(x)^2 \, \frac{3 - L_{f'}(x)}{2} \, .$$

Entonces $x_1 \geq s$, y por inducción $x_n \geq s$ para todo $n \in N$.

Por otra parte, $x_n - x_{n-1} = -\dfrac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}\left[1 + \dfrac{L_f(x_{n-1})}{2}\right] \leq 0$ pues $f(x_n) > 0$ para todo $n \in N$. Luego $\{x_n\}$ es decreciente y pasando al límite en (2.3.), se sigue que converge a la única raíz s, de (2.1.).

Si $f(x_0) < 0$ la demostración es análoga. #

Notar que cuando consideramos x_0 tal que $f(x_0) < 0$, la condición $L_f(x) \geq -2$ en [a,b] no es muy restrictiva puesto que $L_f(s) = 0$ y $L_f(x) \geq 0$ en [s,b].

Definición 2.2.

Sea $\{x_n\}$ una sucesión que converge a s. Diremos que $\{x_n\}$ es oscilante, si $x_{2(j-1)} \geq x_{2j} \geq s \geq x_{2j+1} \geq x_{2j-1}$ ó bien $x_{2j-1} \geq x_{2j+1} \geq s \geq x_{2j} \geq x_{2(j-1)}$ para $j \geq 0$.

En los teoremas que siguen la sucesión $\{x_n\}$ obtenida va a ser oscilante. Por ello, en primer lugar vamos a obtener una condición que nos asegure que $\{x_n\} \subset [a,b]$.

Lema 2.3.

Sea $\delta = \text{máx.}\{-f(a), 3f(b)/2\}$, y supongamos que F es decreciente y $L_f(x) < 1$ en [a,b]. Si $b - a \geq \delta/f'(a)$ entonces $x_n \in [a,b]$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración:

Como $x_n = F(x_{n-1})$ y F es una función decreciente basta probar que $F(b) \geq a$, $F(a) \leq b$ y aplicar inducción. Al ser $L_f(x) < 1$ en [a,b] entonces $F(b) \geq b - 3f(b)/2f'(b)$, y a partir de la hipótesis obtenemos que $F(b) \geq a$. Análogamente se prueba que $F(a) \leq b$, teniendo en cuenta que $L_f(a) < 0$. #

Así, podemos suponer que el intervalo [a,b] verifica que $b-a \geq \delta/f'(a)$, con lo que la sucesión $\{x_n\} \subset [a,b]$. Esta condición es difícil de comprobar en la práctica y por ello en cada resultado de convergencia, dando condiciones sobre el punto de salida aseguramos que $\{x_n\} \subset [a,b]$, en vez de exigir que el intervalo [a,b] verifique la condición dada en el lema anterior, si bien en determinadas situaciones puede ser útil dicha condición.

Teorema 2.4.

Sea $x_0 \in [a,b]$ con $f(x_0)>0$ y $x_0 \geq a + \frac{3f(b)}{2f'(b)}$. Si $L_{f'}(x) \in (3,5]$ y $|L_f(x)|<1$ en [a,b], entonces la sucesión $\{x_n\}$ es oscilante y converge a s.

Demostración:

En primer lugar, veamos que mediante las condiciones dadas para el punto inicial x_0, un procedimiento inductivo prueba que $\{x_n\}$ está contenida en [a,b]. Es claro por hipótesis que $x_1=F(x_0) \leq x_0 \leq b$. Por otra parte,

$$x_1 = F(x_0) > x_0 - 3f(x_0)/2f'(x_0) \geq x_0 - 3f(b)/2f'(b) \geq a$$

por ser $0<L_f(x_0)<1$ y f/f' creciente en [a,b]. Por tanto, $x_1 \in [a,b]$.

En las hipótesis del teorema y teniendo en cuenta (2.4.), se sigue fácilmente que $F'(x)<0$ y $|F'(x)|<1$ en [a,b]. Si $f(x_0)>0$, es decir $x_0 \geq s$, tenemos que

$$x_1 - s = F(x_0) - F(s) = F'(\xi_0)\cdot(x_0 - s) \text{ con } \xi_0 \in (s, x_0),$$

luego $x_1 \leq s$. Supongamos que $x_{2k-1} \leq s$ y $x_{2k} \geq s$ para $k=1,2,\ldots,n-1$. De manera análoga al caso $k=1$, como $F'(x)<0$, se prueba que $x_{2n-1} \leq s$ y $x_{2n} \geq s$. Por lo tanto, $\{x_n\}$ es una sucesión oscilante.

Además, como $|F'(x)|<1$ para todo $x \in [a,b]$, se sigue que

$$|x_1 - s| < M(|F'(x)|)\cdot|x_0 - s| < |x_0 - s|.$$

Supongamos a continuación que

$$|x_k - s| < M(|F'(x)|)^k |x_0 - s| \text{ para } k=1,2,\ldots,n-1.$$

De manera análoga al caso $k=1$, tenemos

$$|x_n - s| < M(|F'(x)|)\cdot|x_{n-1} - s| < M(|F'(x)|)^n |x_0 - s|.$$

Como $M(|F'(x)|)<1$, entonces $\{x_n\} \subset [a,b]$ y $\lim |x_n - s| = 0$. Por lo tanto, $\{x_n\}$ converge a s. #

Teorema 2.5.

Sea $x_0 \in [a,b]$ con $f(x_0)>0$ y $x_0 \geq a + \frac{3f(b)}{2f'(b)}$. Si $L_{f'}(x)>5$ y $|L_f(x)| < \sqrt{\frac{2}{M(L_{f'})-3}}$ en [a,b], entonces la sucesión $\{x_n\}$ es oscilante y converge a s.

Demostración:

En primer lugar, se prueba como en el teorema anterior que $x_1 \in [a,b]$.

Por otra parte, es inmediato comprobar que $|F'(x)|<1$ en [a,b], teniendo en cuenta (2.4.) y que $L_f(x)^2 < \frac{2}{M(L_{f'})-3}$ en [a,b]. El resto de la demostración se sigue de forma análoga a la del teorema anterior. #

En el caso en que $x_0 \in [a,b]$ con $f(x_0)<0$, basta con ver que $x_0 \geq b + \frac{f(a)}{f'(a)}$ para el mismo resultado que en los teoremas anteriores. Notemos que en ambas situaciones tenemos que asegurar la existencia de un punto $x_0 \in [a,b]$ verificando la condición $x_0 \geq a + \frac{3f(b)}{2f'(b)}$, es decir, en los teoremas anteriores ha de verificarse que $a + \frac{3f(b)}{2f'(b)} \leq b$. Ahora bien, como en la práctica, habitualmente, el dominio de f es todo R, esta cantidad nos permitirá fijar el intervalo [a,b].

2.1.3. Notas prácticas

A continuación, pasamos a estudiar qué ocurre en la práctica. Es decir, dada la ecuación (2.1), ¿siempre podemos aproximar su raíz mediante el método de Chebyshev?. Veamos que en la práctica esta pregunta tiene respuesta afirmativa. Según los valores de $m(L_{f'})$ y $M(L_{f'})$, se pueden presentar las siguientes situaciones

i) $M(L_{f'})\leq 3$

ii) $M(L_{f'})\leq 5$ y $m(L_{f'})>3$

iii) $3<M(L_{f'})\leq 5$ y $m(L_{f'})\leq 3$

iv) $M(L_{f'})\geq 5$ y $m(L_{f'})\leq 5$

v) $m(L_{f'})>5$,

como puede verse en la Fig.27.

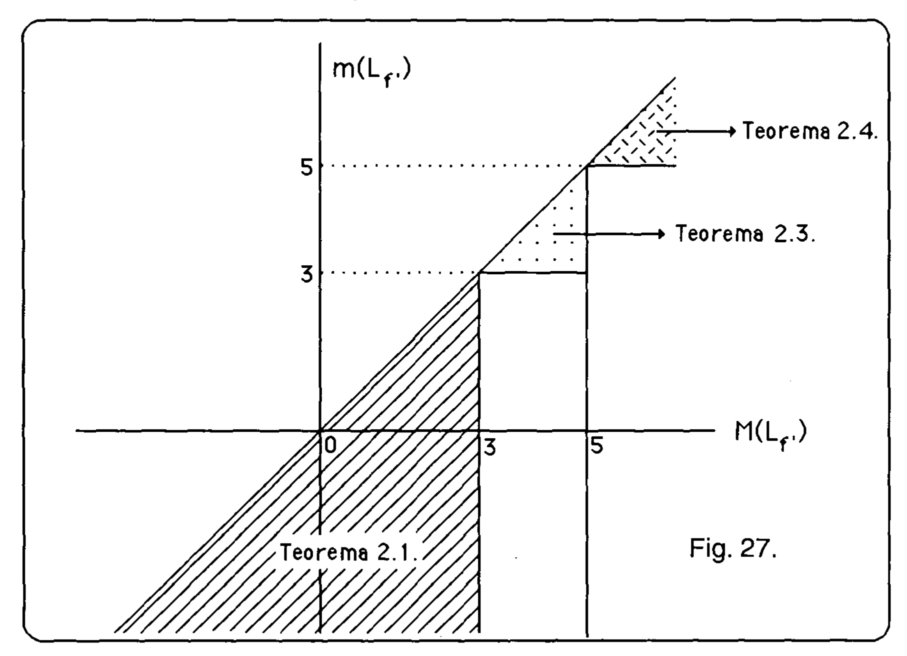


Fig. 27.

Notar que en las situaciones (i), (ii) y (v) la convergencia de la sucesión $\{x_n\}$ está asegurada por los Teoremas 2.1., 2.4. y 2.5. respectivamente, con algunas condiciones sobre L_f.

Por otra parte, en los casos (iii) y (iv) no sabemos nada acerca del crecimiento del operador F. En estos casos, sólo podemos asegurar que la sucesión

$\{x_n\}$ converge a s. Así al igual que en el caso en que $\{x_n\}$ es una sucesión oscilante, debemos asegurar que $\{x_n\}$ está contenida en [a,b]. Aquí, se pueden hacer dos observaciones. La primera de ellas es la misma que la que sigue al Lema 2.3.; y la segunda, consiste en encontrar un intervalo en el cual cualquier punto perteneciente a él, pueda ser punto inicial para la sucesión $\{x_n\}$. El Lema siguiente hace referencia a esta última consideración.

Lema 2.6.

Supongamos que $|F'(x)|<1$ y $|L_f(x)|<1$ en [a,b].

i) Sea $\alpha\in[a,b]$ tal que $f(\alpha)<0$ con $\frac{3f(b)}{2f'(b)} \leq \alpha-a$. Si $x_0\in[a,b]$ con $f(x_0) > 0$ entonces $\{x_n\}\subset[a,b]$.

ii) Sea $\beta\in[a,b]$ tal que $f(\beta)>0$ con $\frac{f(a)}{f'(a)} \geq \beta-b$. Si $x_0\in[a,b]$ con $f(x_0) < 0$ entonces $\{x_n\}\subset[a,b]$.

Demostración:

Para probar (i), veamos en principio que $x_1\in[a,b]$. Es claro que $x_1<x_0$ y

$$x_1 = F(x_0) > x_0 - \frac{3f(x_0)}{2f'(x_0)} \geq x_n - \frac{3f(b)}{2f'(b)} \geq x_0-\alpha + a > a,$$

por ser $L_f(x)<1$ y f/f' creciente en [a,b]. Luego, $x_1\in[a,x_0)\subset[a,b]$. A continuación, distinguimos dos casos: $x_1<s$ y $x_1>s$. En primer lugar, si $x_1<s$, entonces $-1<L_f(x_1)<0$ y como $f(x_1)<0$ se sigue que $x_1<x_2$. Además, se tiene que $|x_2-s|<|x_1-s|<|x_0-s|$ al ser $|F'(x)|<1$. Por tanto, $x_2\in(x_1,x_0)\subset[a,b]$. Ahora, aplicando hipótesis de inducción sobre n, obtenemos que $x_n\in(x_1,x_0)\subset[a,b]$ para todo $n\in N$. En segundo lugar, si $x_1>s$, entonces $s<x_1<x_0$. Por tanto, $x_1\in[a,b]$ y

$$x_2 = F(x_1) > x_1 - \frac{3f(x_1)}{2f'(x_1)} \geq x_1 - \frac{3f(b)}{2f'(b)} \geq x_1-\alpha+a \geq a.$$

Luego, $x_2\in[a,x_1)\subset[a,x_0)\subset[a,b]$.

Ahora distinguimos de nuevo dos casos. Por una parte, si existe algún $x_k\in(s,b]$ con $k=1,\dots,n$, se prueba análogamente al caso anterior que $x_{n+1}\in[a,x_n)\subset[a,x_0)\subset[a,b]$, luego $\{x_n\}\subset[a,b]$. Por otra parte, si existe algún $x_n\in[a,s)$ con $x_k\in(s,b]$ para $k = 1,\dots,n-1$, se prueba de la misma forma que el caso anterior que:

$x_{n+1}\in(x_n,x_{n-1})\subset(x_n,x_0)\subset[a,b]$, luego $\{x_n\}\subset[a,b]$.

El caso (ii) se sigue de forma análoga. #

En el teorema siguiente, elegimos x_0, α y β en [a,b] verificando las condiciones del Lema 2.6.

Teorema 2.7.

Supongamos que $M(|L_f|) < \sqrt{\frac{2}{K}}$ y $K=\text{máx.}\{|3-M(L_{f'})|,|3-m(L_{f'})|\}$.

i) Si $3<M(L_{f'})\leq 5$, $m(L_{f'})\leq 3$ y $|L_f(x)|<1$ en [a,b], entonces la sucesión $\{x_n\}$ converge a s.

ii) Si $M(L_{f'})\geq 5$, y $m(L_{f'})\leq 5$, entonces la sucesión $\{x_n\}$ converge a s.

Demostración:

En el caso (i), veamos primero que $\{x_n\}$ está contenida en [a,b]. Para ello, basta probar que $|F'(x)|<1$ en [a,b] y aplicar el Lema 2.6. En efecto, $|F'(x)| < \frac{K}{2} |L_f(x)^2|<1$ en [a,b] por hipótesis. Por otra parte,

$$|x_1-s| < M(|F'(x)|)\cdot|x_0-s| < |x_0-s|.$$

Supongamos ahora que $|x_p-s| < M(|F'(x)|)^p|x_0-s|$ para p=1,2,...,n-1.

Así, de forma análoga al caso p=1, obtenemos

$$|x_n-s| < M(|F'(x)|)|x_{n-1}-s| < M(|F'(x)|)^n|x_0-s| < |x_0-s|.$$

Por lo tanto, como $M(|F'(x)|)<1$, tenemos que $\lim |x_n-s|=0$. Entonces, $\{x_n\}$ converge a s.

Para probar (ii), basta tener en cuenta que, en las hipótesis anteriores, $K\geq 2$ y por tanto $|L_f(x)|<1$ en [a,b]. La convergencia de $\{x_n\}$ se prueba como en el caso anterior. #

A partir de este resultado, podemos deducir que siempre podemos resolver la ecuación (2.1), aplicando el método de Chebyshev para todos los valores de $M(L_{f'})$ y $m(L_{f'})$ con algunas restricciones sobre los valores de $L_f(x)$ en [a,b]. Pero teniendo en cuenta que $L_f(s)=0$, es claro que en un entorno de la raíz s, siempre podemos aplicar estos resultados.

Ejemplo 2.1.

Dada la función $f(x)=x^3-x^2-x-2$, veamos que el método de Chebyshev es convergente a la raíz de la ecuación $f(x)=0$. Es fácil obtener que

$$L_f(x) = \frac{(x^3-x^2x-2)(6x-2)}{(3x^2-2x-1)^2} \text{ y } L_{f'}(x) = \frac{6(3x^2-2x-1)}{(6x-2)^2}.$$

Entonces, se sigue de forma sencilla que $L_{f'}(x)\leq 1/2$ en R_+ y $2/3>L_f(x)>-2$ para todo x >1'51763. Por tanto, si restringimos el intervalo inicial al intervalo [1'52,4], y tomamos por ejemplo x_0=1'6, entonces por el Teorema 2.2. la sucesión $\{x_n\}$ dada por (2.3.) es creciente y converge a la solución de f(x)=0, ver Tabla 6.

iter.	x_n
0	1.600000000000000
1	1.808984924897836
2	1.989904870759261
3	1.999999075443373
4	2.000000000000000

Tabla 6

2.2. El método de Halley.

2.2.1. Generalidades

Es conocido [12] que dada una ecuación no lineal (2.1.), si para su resolución aplicamos el método de Newton, también llamado método de la tangente, este proceso iterativo posee convergencia cuadrática con constante del error asintótico $|f''(s)/2!|$, siendo s la raíz de dicha ecuación. Entonces, un procedimiento para aumentar la velocidad de convergencia de este proceso iterativo, consiste en conseguir que esta constante del error asintótico sea cero, con lo cual el proceso iterativo pasaría a tener, al menos, convergencia cúbica. Para ello, en general, dada una función arbitraria g sabemos que el producto f(x) g(x) preserva los ceros de la función dada f. Por ello vamos a resolver la nueva ecuación no lineal $f(x)g(x) = 0$. Así, podemos plantearnos cómo ha de ser la función g para que se verifique $(fg)''(s) = 0$, con lo cual ya obtendríamos, al aplicar el método de Newton, un proceso iterativo con convergencia cúbica. Para ello, en un entorno apropiado [a,b] de la raíz s, es suficiente suponer que $f,g \in C^{(2}([a,b])$ y que $f'(x)g(x) \neq 0$. Notemos que $f(s) = 0$ y además $(fg)''(s) = 0$. Entonces, desarrollando esta segunda derivada podemos escribir

$$(2.5.) \qquad \frac{g'(s)}{g(s)} = -\frac{f''(s)}{2\, f'(s)}$$

Así, integrando (2.5.) sobre el intervalo [a,b] eligiendo apropiadamente la constante de integración, obtenemos que la función $g = (f')^{-1/2}$ verifica la condición (2.5.). Entonces aplicando el método de Newton a la ecuación $f(x)g(x) = 0$ obtenemos el siguiente proceso iterativo

$$x_n = x_{n-1} - \frac{1}{[f'(x_{n-1})/f(x_{n-1})] - [f''(x_{n-1})/2f'(x_{n-1})]} \qquad \text{para} \quad n \geq 1.$$

Mediante el grado de convexidad logarítmico este proceso iterativo, denominado método de Halley, [9] admite la expresión

$$(2.6.) \quad x_n = F(x_{n-1}) \quad \text{con} \quad F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \frac{2}{2 - L_f(x)}\,.$$

2.2.2. Discusión de la Convergencia

Dedicamos esta Sección a estudiar la convergencia del método de Halley a partir del grado de convexidad logarítmico de las funciones f y f'. La expresión de este método viene dada por (2.6). A continuación, estudiamos la convergencia para el método de Halley en el caso en que la sucesión $\{x_n\}$ sea monótona a la raíz.

Teorema 2.8.

Supongamos $L_{f'}(x)\leq 3/2$ en [a,b]. Si $f(x_0)>0$ y $L_f(x)<2$ en [a,b], entonces la sucesión $\{x_n\}$ dada por (2.6) es decreciente y convergente a s. Si $f(x_0)<0$, entonces $\{x_n\}$ es creciente y convergente a s.

Demostración:

Supongamos que $x_0\in[a,b]$ tal que $f(x_0)>0$. Veamos que $x_n\geq s$ y $x_{n-1}\geq x_n$ para todo $n\in N$. En primer lugar, $x_0-s\geq 0$ por ser $f(x_0)>0$. Además,

$$x_1-s = F(x_0)-F(s) = F'(\xi_0)\cdot(x_0-s) \quad \text{con} \quad \xi_0[(s,x_0)$$

Ahora bien, teniendo en cuenta

$$(2.7) \qquad F'(x) = \frac{L_f(x)^2}{[2-L_f(x)]^2}\,[3-2L_{f'}(x)]$$

es claro que $F'(x)>0$ en [a,b] por ser $L_{f'}(x)\leq 3/2$. Luego $x_1\geq s$. Por otra parte, como $L_f(x)<2$, tenemos que $x_1-x_0 = \dfrac{-f(x_0)}{f'(x_0)}\,\dfrac{2}{2-L_f(x_0)}\leq 0$. A continuación, aplicando hipótesis de inducción sobre n, se sigue de forma fácil que $x_n\geq s$ y $x_{n-1}\geq x_n$ para todo $n\in N$. Entonces, la sucesión $\{x_n\}$ es decreciente y acotada. Por lo tanto, $\{x_n\}$ es convergente. Pasando al límite en (2.6.) obtenemos que precisamente este límite ha de ser la única raíz s de f(x) = 0. #

En los teoremas siguientes la sucesion $\{x_n\}$ dada por (2.6.) no va ser monótona. Por eso vamos a obtener en primer lugar condiciones que nos aseguren que $\{x_n\}\subset[a,b]$.

Lema 2.9

Supongamos $|F'(x)|<1$ y $|L_f(x)|<1$ en [a,b].

(i) Sean x_0, $\alpha \in (a,b)$ tales que $f(\alpha) < 0$ y $f(x_0) > 0$, si $2f(x_0)/f'(x_0) \leq \alpha - a$ entonces $\{x_n\} \subset [a,b]$.

(ii) Sean x_0, $\beta \in (a,b)$ tales que $f(\beta) > 0$ y $f(x_0) < 0$, si $f(x_0)/f'(x_0) \geq -b + \beta$ entonces $\{x_n\} \subset [a,b]$.

Demostración:

(i) Como $x_1 = F(x_0) \geq x_0 - 2\, f(x_0)/f'(x_0) \geq x_0 - \alpha + a > a$, es claro que $x_1 \in (a, x_0) \subset [a,b]$. Distinguimos dos casos $x_1 < s$ y $x_1 > s$.

(a) Si $x_1 < s$ entonces $-1 < L_f(x_1) < 0$ y como $f(x_1) < 0$ se sigue que $x_1 < x_2$. Además, se tiene que $| x_2 - s | < | x_1 - s | < | x_0 - s|$ al ser $|F'(x)| < 1$. Se deduce por tanto que $x_2 \in (x_1, x_0) \subset [a,b]$. Un proceso inductivo prueba que $xn \in (x_1, x_0) \subset [a,b]$.

(b) Cuando $x_1 > s$ entonces $s < x_1 < x_0$, por tanto $x_1 \in [a,b]$ y $x_2 = F(x_1) \geq x_1 - 2\, f(x_1)/f'(x_1) \geq x_1 - 2\, f(x_0)/f'(x_0) \geq x_0 - \alpha + a > a$ puesto que f/f' es una función creciente en (s, b). Luego, $x_2 \in (a,x_1) \subset (a, x_0) \subset [a,b]$. De nuevo podemos distinguir dos casos:

(b.1) Si $x_k \in (s,b)$ para todo $k = 1,..,n-1$, podemos probar de manera análoga que $x_n \in (a, x_0)$ y por tanto $\{x_n\} \subset [a,b]$.

(b.2) Si existe algún $x_k < s$ con $x_1, \ldots, x_{k-1} \in (s, b)$ se puede probar, como en la parte (a) que $x_{k+1} \in (x_k, x_0) \subset [a,b]$. Por tanto $\{x_n\} \subset [a,b]$.

(ii) Se prueba de la misma forma. #

Las condiciones del resultado anterior pueden suavizarse en el caso de que podamos afirmar que $\{x_n\}$ es oscilante, así tenemos que para $L_{f'}(x) > 3/2$ en [a,b], la sucesión $\{x_n\}$ dada por (2.6.) es oscilante, y por tanto, tenemos que asegurar que $x_1 \in [a,b]$, lo que nos lleva a considerar únicamente una condición sobre el punto de salida.

Teorema 2.10.

Sea $x_0 \in [a,b]$ con $f(x_0) > 0$ y $x_0 \geq a + \frac{2f(b)}{f'(b)}$. Si $L_{f'}(x) \in (3/2,2]$ y $|L_f(x)| < 1$ en [a,b], entonces la sucesión $\{x_n\}$ converge a s. Además, esta sucesión es oscilante.

Demostración:

Teniendo en cuenta la condición dada para el punto de salida x_0 y que f/f' es creciente en [a,b], se deduce fácilmente que $x_1 \in [a,b]$.

A continuación, veamos que la sucesión $\{x_n\}$ es oscilante y está contenida en [a,b]. Si $f(x_0)>0$, es decir, $x_0>s$, entonces $x_1-s = F(x_0)-F(s)= F'(\xi_0)(x_0-s)$ con $\xi_0 \in (s,x_0)$, luego $x_1 \leq s$ y $|x_1-s| < M(|F'|)|x_0-s|$. Ahora, es fácil probar por inducción que $x_{2k} \geq s$, $x_{2k+1} \leq s$ y $|x_{k+1}-s| < M(|F'|)^{k+1}|x_0-s|$ para todo $k \geq 0$. Luego, $\{x_n\}$ es oscilante. Además, como $M(|F'|)<1$ en [a,b], obtenemos que la sucesión $\{x_n\} \subset [a,b]$, la sucesión $\{|x_n-s|\}$ es decreciente y converge a cero. Por tanto $\{x_n\}$ converge a s. #

Teorema 2.11.

Sea $x_0 \in [a,b]$ con $f(x_0)>0$ y $x_0 \geq a + \frac{2f(b)}{f'(b)}$. Si $L_{f'}(x)>2$ y $|L_f(x)| < \frac{-1+\sqrt{2M(L_{f'})-3}}{M(L_{f'})-2}$ en [a,b], entonces la sucesión $\{x_n\}$ converge a s y es oscilante.

Demostración:

De la misma forma que en el Teorema anterior se sigue que $x_1 \in [a,b]$. Por otra parte, se comprueba fácilmente que $|F'(x)|<1$ en [a,b]. Basta tener en cuenta (2.7.) y que $2(M(L_{f'})-2)L_f(x)^2 + 4L_f(x)-4<0$ por ser $L_f(x) < \frac{-1+\sqrt{2M(L_{f'})-3}}{M(L_{f'})-2}$ en [a,b]. El resto de la demostración es similar a la del teorema anterior. #

En el caso en que $x_0 \in [a,b]$ con $f(x_0)<0$ y $x_0 \geq b + f(a)/f'(a)$, se siguen los mismos resultados en los dos Teoremas anteriores. Notemos que en ambas situaciones tenemos que asegurar la existencia de un punto $x_0 \in [a,b]$ verificando la condición correspondiente, es decir, por ejemplo en el caso de los teoremas anteriores ha de verificarse que $a + \frac{2f(b)}{f'(b)} \leq b$. Ahora bien, como en la práctica, habitualmente, el dominio de f es todo R, esta cantidad nos permitirá fijar el intervalo [a,b].

2.2.3. Notas prácticas

Probamos a continuación que en la práctica siempre se puede aplicar el método de Halley para resolver la ecuación (2.1.). Se obtienen, a partir de los valores de $M(L_{f'})$ y $m(L_{f'})$, los siguientes casos

i) $M(L_{f'}) \leq 3/2$

ii) $M(L_{f'}) \leq 2$ y $m(L_{f'})>3/2$

iii) $3/2<M(L_{f'}) \leq 2$ y $m(L_{f'}) \leq 3/2$

iv) $M(L_{f'})>2$ y $m(L_{f'}) \leq 2$

v) $m(L_{f'})>2$,

como puede verse en la Fig. 28.

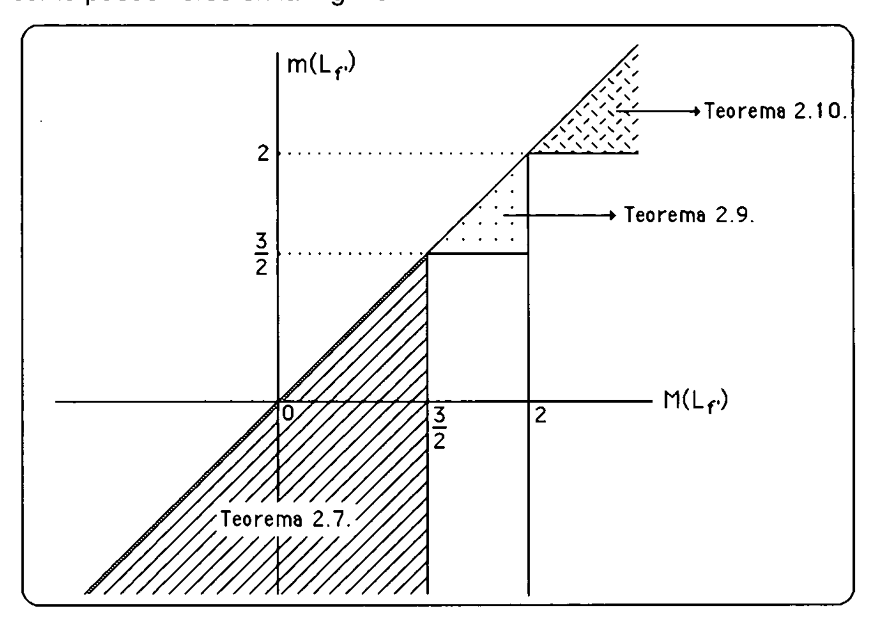


Fig.28.

Notar que en los casos (i), (ii) y (v) la convergencia de $\{x_n\}$ está estudiada en los Teoremas 2.8., 2.10. y 2.11. respectivamente con algunas condiciones sobre L_f.

A continuación, estudiamos los casos (iii) y (iv). En ellos no sabemos cómo va a ser la convergencia de la sucesión $\{x_n\}$, por ello para asegurar que $\{x_n\} \subset [a,b]$ podemos aplicar el Lema 2.9., en el que se asegura este hecho dando condiciones sobre el punto de salida o bien aplicar el siguiente resultado donde sólo se fija la ubicación del punto de salida respecto de la raíz de (2.1.).

Lema 2.12.

Supongamos que $|F'(x)|<1$ y $|L_f(x)|<1$ en $[a,b]$.

i) Sean $x_0, \alpha \in [a,b]$ tales que $f(\alpha)<0$ y $f(x_0)>0$. Si $\frac{2f(b)}{f'(b)} \leq \alpha - a$, entonces $\{x_n\} \subset [a,b]$.

ii) Sean $x_0, \beta \in [a,b]$ tales que $f(\beta)>0$ y $f(x_0)<0$. Si $\frac{f(a)}{f'(a)} \geq \beta - b$, entonces $\{x_n\} \subset [a,b]$.

Demostración:

Totalmente análoga a la del Lema 2.9. #

En el teorema siguiente, elegimos x_0, α y β en [a,b] verificando las condiciones del Lema 2.12.

Teorema 2.13.

Sea $K = \text{máx.}\{|3-2M(L_{f'})|, |3-2m(L_{f'})|\}$. Supongamos que $M(|L_f|) < \frac{2}{1+\sqrt{K}}$. Entonces,

i) Si $3/2<M(L_{f'})\leq 2$, $m(L_{f'})\leq 3/2$ y $|L_f(x)|<1$ en [a,b], la sucesión $\{x_n\}$ converge a s.

ii) Si $M(L_{f'})>2$, y $m(L_{f'})\leq 2$, la sucesión $\{x_n\}$ converge a s.

Demostración:

Para el caso (i), teniendo en cuenta (2.7.) y que $K = \text{máx.}\{|3-2M(L_{f'})|, |3-2m(L_{f'})|\}$ en [a,b], se sigue que

$$|F'(x)| < \frac{K\cdot M(|L_f|)^2}{(2-M(|L_f|))^2}.$$

Luego, $|F'(x)|<1$ en [a,b] por ser $M(|L_f|) < \frac{2}{1+\sqrt{K}}$. Ahora, aplicando el Lema 2.12., es fácil comprobar que la sucesión $\{x_n\} \subset$ [a,b].

En el caso (ii), basta tener en cuenta en las hipótesis del teorema que $K>1$, y por tanto $M(|L_f|)<1$. Luego, $|L_f(x)|<1$ en [a,b]. Por otra parte, debemos probar que $|F'(x)|<1$ en [a,b], es decir, $(K-1)M(|L_f|)^2 + 4M(|L_f|) - 4 < 0$. Condicción que se sigue fácilmente por ser $0 < M(|L_f|) < \frac{2}{1+\sqrt{K}}$.

El resto de la demostración, para ambos casos, es análoga a la del Teorema 2.10., si bien no podemos asegurar que $\{x_n\}$ sea oscilante. #

Se sigue de este estudio que dada la ecuación (2.1.) siempre podemos aplicar el método de Halley para resolverla, teniendo en cuenta algunas restricciones para $L_f(x)$, que en realidad, al ser $L_f(s)=0$, siempre podemos encontrar un entorno de s en el cual se pueden aplicar estos resultados.

Ejemplo 2.2.

Veamos que el método de Halley es convergente a la raíz de la ecuación $f(x)=-8+e^{x^2-4}=0$ en el intervalo [1,5]. Se sigue de forma sencilla que

$$L_f(x) = \frac{(1+2x^2)(e^{x^2-4})}{2x^2e^{x^2-4}} \quad \text{y} \quad L_{f'}(x) = \frac{2x^2(3+2x^2)}{(1+2x^2)^2}$$

Entonces, es fácil probar que $L_{f'}(x) \leq 3/2$ en $\mathbb{R}_+$ y $L_f(x)<2$ para todo $x \geq 0$. Por tanto, podemos tomar como punto inicial x_0 para (2.6) cualquier punto del intervalo [1,5] que verifique $f(x_0)>0$. Por ejemplo, $x_0=4$. Así, obtenemos por el Teorema 2.6. que la sucesión $\{x_n\}$ dada por (2.6.) es decreciente y convergente a la solución de $f(x)=0$, ver Tabla 7.

iter.	x_n
0	4.000000000000000
1	3.741961670527600
2	3.465034280857143
3	3.165567038560662
4	2.846385484142443
5	2.563813967367478
6	2.467671172927391
7	2.465652373241162
8	2.465652356209171
9	2.465652356209171

Tabla 7

2.2.4. Apéndice

Como ya se ha indicado en la construcción del método de Halley, éste se puede obtener aplicando el método de Newton a la función

$$h(x) = \frac{f(x)}{[f'(x)]^{1/2}} .$$

En lo que sigue, supondremos f en las condiciones habituales. Estudiando la convergencia del método de Newton para la función h, mediante el grado de convexidad logarítmico, obtenemos un resultado de convergencia global para el método de Halley, utilizando para ello únicamente resultados de convergencia para el método de Newton. Si bien son resultados ya obtenidos anteriormente tienen interés en cuanto a la técnica utilizada.

Teorema 2.14.

(i) Si $L_{f'}(x) \leq 3/2$ en [a,b] entonces $\{x_n\}$ es una sucesión decreciente que converge a s.

(ii) Si $L_{f'}(x) \in (3/2, 2)$ y $L_f(x) < 1$ en [a,b], para $x_0 \geq a + 2 f(b)/f'(a)$, entonces la sucesión $\{x_n\}$ es oscilante y converge a s.

Demostración :

(i) Es inmediato que h tiene un punto de inflexión en s, ya que

$$h''(x) = \frac{f'(x)}{4\,[f'(x)]^{1/2}} L_f(x) \, [3 - 2 L_{f'}(x)] .$$

Si $L_{f'}(x) \leq 3/2$, se sigue que h es una función cóncava en (a,s) y convexa en (s,b) . Por otra parte , como h" es una función positiva en (s,b), la función $h'(x)=f'(x)^{1/2}(2-L_f(x))/2$ es creciente en (s,b). Además, $h'(s) > 0$, y por tanto h es una función creciente en (s,b). Aplicando el método de Newton a la función h, obtenemos una sucesión decreciente $\{x_n\}$ cuyo límite es s.

(ii) Como $F(x) = x - h(x)/h'(x)$, se sigue de (2.6.) que

$$L_h(x) = \frac{d}{dx}[x - \frac{h(x)}{h'(x)}] = \frac{d}{dx}[x - \frac{f(x)}{f'(x)} C(x)] , \quad \text{con} \quad C(x) = \frac{2}{2 - L_f(x)} .$$

Como L_h es una función negativa en [a,b], obtenemos que

$$L_h(x) > -1 \Leftrightarrow 2 - (1 - L_f(x)) \frac{2}{2 - L_f(x)} - \frac{f(x)}{f'(x)} \frac{2 L_f'(x)}{[2 - L_f(x)]^2} > 0 .$$

Entonces, $| L_h(x) | < 1 \Leftrightarrow f'(x) (2 - L_f(x)) - f(x) L'_f(x) > 0$.

$$\text{Por otra parte ,} \quad L_f'(x) = \frac{f''(x)}{f'(x)} [1 + L_f(x) (L_{f'}(x) - 2)] .$$

Por tanto, obtenemos que $| L_h(x) | < 1$ sí y sólo sí $2-L_f(x) > L_f(x) [1 + L_f(x) (L_{f'}(x) - 2)]$. Teniendo en cuenta que $L_{f'}(x) \in (3/2,2)$ y $L_f(x) < 1$ en [a,b], se sigue que $|L_h(x)| <1$ en [a,b]. Así, existe $M \in (0,1)$ tal que $| L_h(x) | < M$ en [a,b].

Notemos que $F(x_0) \in (a,s)$. Por otra parte, como $x_1 - s = F(x_0) - F(s) = F'(\xi_0)(x_0 - s)$ para $\xi_0 \in (s,x_0)$ y $F'(x) = L_h(x)$, se sigue que $|x_1 - s| < M |x_0 - s|$. Por inducción , obtenemos que $F(x_{2n}) \in (s,b)$ y $F(x_{2n+1}) \in (a,s)$ para $n \geq 0$, con lo que la sucesión es oscilante.

Además , $x_n - s = F(x_{n-1}) - F(s) = F'(\xi_{n-1})(x_{n-1} - s)$ para ξ_{n-1} un punto del intervalo (mín.$\{x_k, s\}$, máx.$\{x_k, s\}$). Entonces $|x_n - s| < M |x_{n-1} - s|$. Reiterando este proceso, obtenemos que $|x_n - s| < M^n |x_0 - s|$ y por tanto $\lim_n x_n = s$. #

2.3. Familia de procesos iterativos de tercer orden

2.3.1. Discusión de la Convergencia

A continuación, vamos a considerar una familia de procesos iterativos del tipo Chebyshev-Halley [10] con al menos convergencia cúbica y, mediante los valores de $L_{f'}$, obtendremos un resultado de convergencia global para todos ellos. Para terminar este párrafo, por medio de un estudio de optimización, construiremos un procedimiento práctico para elegir el proceso más rápido de la familia dada para resolver (2.1.).

Por otra parte, es conocido [5] que un proceso iterativo dado por la expresión

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} H(L_f(x_{n-1}))$$

donde la función H verifica que $H(0) = 1$, $H'(0) = 1/2$ y $|H''(0)| < +\infty$, tiene al menos convergencia cúbica. Consideramos la familia de procesos iterativos

(2.8) $$x_{n,\alpha} = F_\alpha(x_{n-1,\alpha}) = x_{n-1,\alpha} - \frac{f(x_{n-1,\alpha})}{f'(x_{n-1,\alpha})} H(\alpha, L_f(x_{n-1,\alpha})$$ con

$$H(\alpha,x) = 1 + \frac{x}{2 - \frac{x}{\alpha}} \quad \text{para} \quad \alpha \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\} .$$

Es fácil ver que todos ellos tienen al menos convergencia cúbica. Notar además que para $\alpha = 1$ obtenemos (2.6.) y si consideramos $F_{\pm\infty} = \lim_{m \to \pm\infty} F_m$ obtenemos (2.3.).

A continuación damos un resultado de convergencia global para los procesos iterativos de esta familia.

Teorema 2.15.

Sea $\alpha \in R^*$ y $x_{0,\alpha} \in [a,b]$ con $f(x_{0,\alpha}) > 0$.

i) Si $\alpha < 0$ y $L_{f'}(x) \leq 3 - 3/(2\alpha)$ en [a,b], entonces la sucesión $\{x_{0,\alpha}\}$ es decreciente a s.

ii) Si $0 < \alpha < 1$, $L_f(x) < 2\alpha$ y $L_{f'}(x) \leq 3 - 3/(2\alpha)$ en [a,b], entonces la sucesión $\{x_{n,\alpha}\}$ es decreciente a s.

iii) Si $\alpha \geq 1$, $L_f(x) < 2\alpha$ y $L_{f'}(x) \leq 2 - 1/(2\alpha)$ en [a,b], entonces la sucesión $\{x_{n,\alpha}\}$ es decreciente a s.

Además, la sucesión $\{x_{n,\alpha}\}$ tiene al menos convergencia cúbica en los casos anteriores.

Demostración :

En primer lugar vamos a probar, para los tres casos, que la sucesión $\{ x_{n,\alpha} \}$ es decreciente y que está acotada por s.

Puesto que $x_{n,\alpha} - s = F_\alpha(x_{n-1,\alpha}) - F_\alpha(s)$, es claro que si F_α es creciente en [a,b], aplicando inducción y el Teorema del Valor Medio obtenemos que la sucesión está acotada por s. Entonces operando en la expresión (2.8.) obtenemos

$$F'_\alpha(x) = \frac{L_f(x)^2}{[2\alpha - L_f(x)]^2}[2\alpha^2(3 - L_{f'}(x)) + (1-\alpha)L_f(x) - 3\alpha] .$$

Cuando $\alpha < 0$ entonces $F'_\alpha(x) \geq 0$ sí y sólo sí $2\alpha^2(3-L_{f'}(x)) + (1-\alpha) L_f(x) - 3\alpha \geq 0$ y como $(1-\alpha) L_f(x) \geq 0$, $F'_\alpha(x) \geq 0$ si $2\alpha^2(3 - L_{f'}(x)) - 3\alpha \geq 0$. Pero esto ocurre sí y sólo sí $L_{f'}(x) \leq 3 - 3/(2\alpha)$. Esto prueba que en el caso (i) la sucesión $\{x_{n,\alpha}\}$ está acotada por s. La demostración de este hecho es análoga para (ii). El caso (iii) es similar teniendo en cuenta que $L_f(x) < 2\alpha$ en [a,b].

Por otra parte como $$x_{n-1,\alpha} - x_{n,\alpha} = \frac{f(x_{n-1,\alpha})}{f'(x_{n-1,\alpha})} H(\alpha, L_f(x_{n-1,\alpha})) \geq 0$$

si y sólo si $H(\alpha, L_f(x_{n-1,\alpha})) \geq 0$. Entonces, como $H(\alpha, L_f(x_{n-1,\alpha})) \geq 0$

para $\alpha < 0$ en R_+ y para $\alpha > 0$ en $(0, 2\alpha)$ y además $x_{n-1,\alpha} \geq 0$, obtenemos que la sucesión $\{x_{n,\alpha}\}$ es decreciente.

Por tanto $\{x_{n,\alpha}\}$ tiene un límite u. Tomando límites en (2.8.) se tiene que $f(u) = 0$, luego $u = s$.

Además, por construcción, todos estos procesos iterativos tienen al menos convergencia cúbica. #

A continuación nos planteamos el siguiente problema, dada una ecuación no lineal (2.1.) queremos encontrar el valor de α para el cual la sucesión obtenida en (2.8.) converja a s más rápidamente . Para ello es suficiente estudiar la función

$H(\alpha, x) = 1 + \frac{\alpha x}{2\alpha - x}$ p para un x fijo. Entonces como $H(\alpha, x)$

es una función decreciente en α, obtenemos el siguiente resultado

Teorema 2.16.

Sean αi, $i = 1, 2$, números reales, verificando ambos que $\alpha i < 0$, ó $\alpha i \in (0,1)$, ó $\alpha i \in [1, +\infty)$ y $\{x_{n,\alpha i}\}$, $i = 1,2$ las sucesiones decrecientes a s obtenidas en las condiciones del Teorema 2.15., con $x_{0,\alpha 1} = x_{0,\alpha 2} = x_0$ y $f(x_0) > 0$. Entonces, si $\alpha 1 < \alpha 2$ se sigue que $x_{n,\alpha 1} < x_{n,\alpha 2}$ para todo n.

Demostración :

Si $\alpha 1 < \alpha 2 < 0$, entonces $H(\alpha 1, L_f(x)) > H(\alpha 2, L_f x))$.

Al ser las funciones $F_{\alpha i}$, para $i = 1,2$, crecientes probaremos por inducción que $x_{n,\alpha 1} < x_{n,\alpha 2}$.

Si $0 < \alpha 1 < \alpha 2 < 1$, como $L_f(x) < 2\alpha i$ en $[a,b]$, para $i = 1,2$, entonces $H(\alpha 1, L_f(x)) > H(\alpha 2, L_f(x))$ y por un argumento similar obtenemos que $x_{n,\alpha 1} < x_{n,\alpha 2}$ para cada $n \in N$.

Si $1 \leq \alpha 1 < \alpha 2$, la demostración es análoga. #

Podemos deducir de este hecho que a valores de α más pequeños la sucesión $\{x_{n,\alpha}\}$ converge a s más rápidamente.

2.3.2. Notas prácticas

Dada una función f, queremos elegir un valor de α que nos dé la mejor sucesión $\{x_{n,\alpha}\}$, de la familia (2.8.), para resolver (2.1.). Para ello consideramos para $L_{f'}$ las condiciones que aparecen en el Teorema 2.15.

Teniendo en cuenta la figura siguiente podemos distinguir las siguientes situaciones : $M(L_{f'}) > 3$, $M(L_{f'}) \in (-\infty, 3/2)$, $M(L_{f'}) \in [3/2, 2)$ y $M(L_{f'}) \in [2, 3]$.

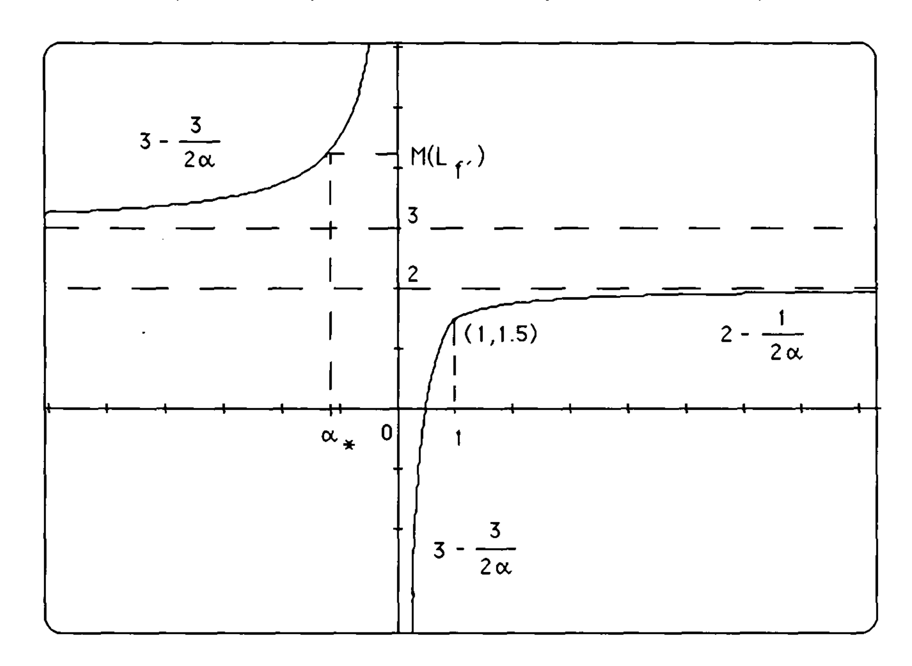


Fig.29.

Si $M(L_{f'}) > 3$ existe sólamente un $\alpha_* \in (-\infty, 0)$ tal que $M(L_{f'}) = 3 - 3/(2\alpha_*)$ y por tanto aplicamos para este α_*, el proceso iterativo (2.8.) para resolver (2.1.), siendo $x_{0,\alpha*} \in [a,b]$ tal que $f(x_{0,\alpha*}) > 0$. Este proceso iterativo converge a s por el Teorema 2.15. y es el mejor para resolver la ecuación (2.1.) por el Teorema 2.16.

Si $M(L_{f'}) \in (-\infty, 3/2)$, existe sólamente un $\alpha_* \in (0,1)$ tal que $M(L_{f'}) = 3-3/(2\alpha_*)$, entonces, como antes, aplicamos el proceso iterativo (2.8.) para este α_*.

Si $M(L_{f'}) \in [3/2, 2)$, existe sólamente un $\alpha_* \in [1, +\infty)$ tal que $M(L_{f'}) = 2-1/(2\alpha_*)$, y como en los otros casos, aplicamos el proceso iterativo (2.7.) para este α_*.

En las dos últimas situaciones, si $M(L_f) < 2\alpha_*$ podemos elegir cualquier $x_{0,\alpha*} \in [a,b]$. En otro caso , si $M(L_f) \geq 2\alpha_*$, como $L_f(s)=0$ existe $c \in R$ tal que

$[a,c] \subset [a,b]$ con $L_f(x) < 2\alpha_*$ en $[a, c]$. Y por tanto obtenemos un resultado de convergencia local.

Finalmente, si $M(L_{f'}) \in [2,3]$ consideramos el método de Chebyshev para resolver (2.1.), cuya convergencia está asegurada en el Teorema 2.1.

Ejemplo 2.3

Sea la función $f(x) = x^3 + 30x - 117$, entonces buscamos el proceso iterativo más rápido de la familia (2.8.) para resolver la ecuación no lineal $f(x) = 0$ en el intervalo $[2,4]$. Es fácil obtener que

$$L_f(x) = \frac{2}{3} + \frac{60x^2 - 702x - 600}{9x^4 + 180x^2 + 900} \quad \text{y} \quad L_{f'}(x) = \frac{1}{2} + \frac{5}{x^2} .$$

Entonces tenemos que $L_{f'}$ es una función decreciente en $[2,4]$, por tanto $M(L_{f'}) = L_{f'}(2) = 7/4$, luego $N \in [3/2,2)$. Entonces consideramos $M(L_{f'}) = 2 - 1/(2\alpha_*)$, de donde obtenemos $\alpha_* = 2$.

Por otra parte, como $60x^2 - 702x - 600 < 0$ y $9x^4 + 180x^2 + 900 \geq 0$ en $[2,4]$, se sigue que $L_f(x) < 2/3$, luego $M(L_f) < 2/3$ y por tanto $M(L_f) < 2\alpha_* = 4$. Así podemos tomar cualquier $x_{0,2} \in [2,4]$ tal que $f(x_{0,2}) > 0$, como punto de salida de la sucesión $\{x_{0,2}\}$, que será la más rápida, que se puede obtener de la familia (2.8.), en converger a la raíz de $f(x) = 0$ en el intervalo $[2,4]$.

BIBLIOGRAFIA

[1] ALEFELD, G. (1981):
On the convergence of Halley´s method.
Amer. Math. Monthly, 88. 530-536.

[2] CAMPBELL, R. (1966):
Les intégrales eulériennes et leurs applications.
Dunod, París.

[3] CIESIELSKI, Z. (1959):
Some properties of convex functions of higher orders.
Annales Polonici Mathematici VII. 1-7.

[4] DONG CHEN. & ARGYROS,I.K. (1993):
Results on Chebyshev method in Banach spaces.
Proyecciones. Vol. 12 nº 2, 119-128.
Universidad Católica del Norte. Antofagasta. Chile.

[5] GANDER, W. (1985):
On Halley´s iteration method.
Amer. Math. Monthly 92. 131-134.

[6] GARAY, J & HERNANDEZ, M.A. (1988):
Degree of logarithmic convexity.
Publicaciones del Seminario Matemático García de
Galdeano. Serie II. Sección 1. nº 26. Universidad de Zaragoza.

[7] GASCA, M. (1993):
Calculo Numérico I.
U.N.E.D., Madrid.

[8] HENRICI, P. (1982):
Essentials of Numerical Analysis.
Wiley, New York.

[9] HERNÁNDEZ, M. A. (1991):
A note on Halley's method.
Numer. Math., 59 (3), 273-276.

[10] HERNÁNDEZ, M. A. & SALANOVA, M. A. (1993):
A Family of Chebyshev - Halley type methods.
Intern. J. Computer. Math., 47, 59-63.

[11] HERNÁNDEZ, M. A. & SALANOVA, M. A. (1991):
Grados de convexidad y concavidad de una curva. Su aplicación al estudio de procesos iterativos para la resolución de ecuaciones.
Publicaciones del Seminario García de Galdeano. Serie II. Sección 4. nº4. Universidad de Zaragoza.

[12] HOUSEHOLDER, A. S. (1970):
The Numerical Treatment of a Single Nonlinear Equation.
Mc. Graw Hill. New York.

[13] LOPEZ MONTALVO, O.M. (1986):
Metodos iterativos de resolución de ecuaciones.
Alhambra. Madrid.

[14] O ´ NEILL, B. (1966):
Elementary differential geometry.
Academic Press. New York.

[15] ORTEGA, J. M. ; RHEINBOLDT, W. C. (1970):
Iterative solution of nonlinear equations in several variables.
Academic Press. New York.

[16] OSTROWSKI, A. (1966):
Solution of equations and systems of equations.
Academic Press. New York.

[17] RALSTON, A and RABINOWITZ, P. (1978):
A first course in Numerical Analysis.
Mac Graw Hill. Singapore.

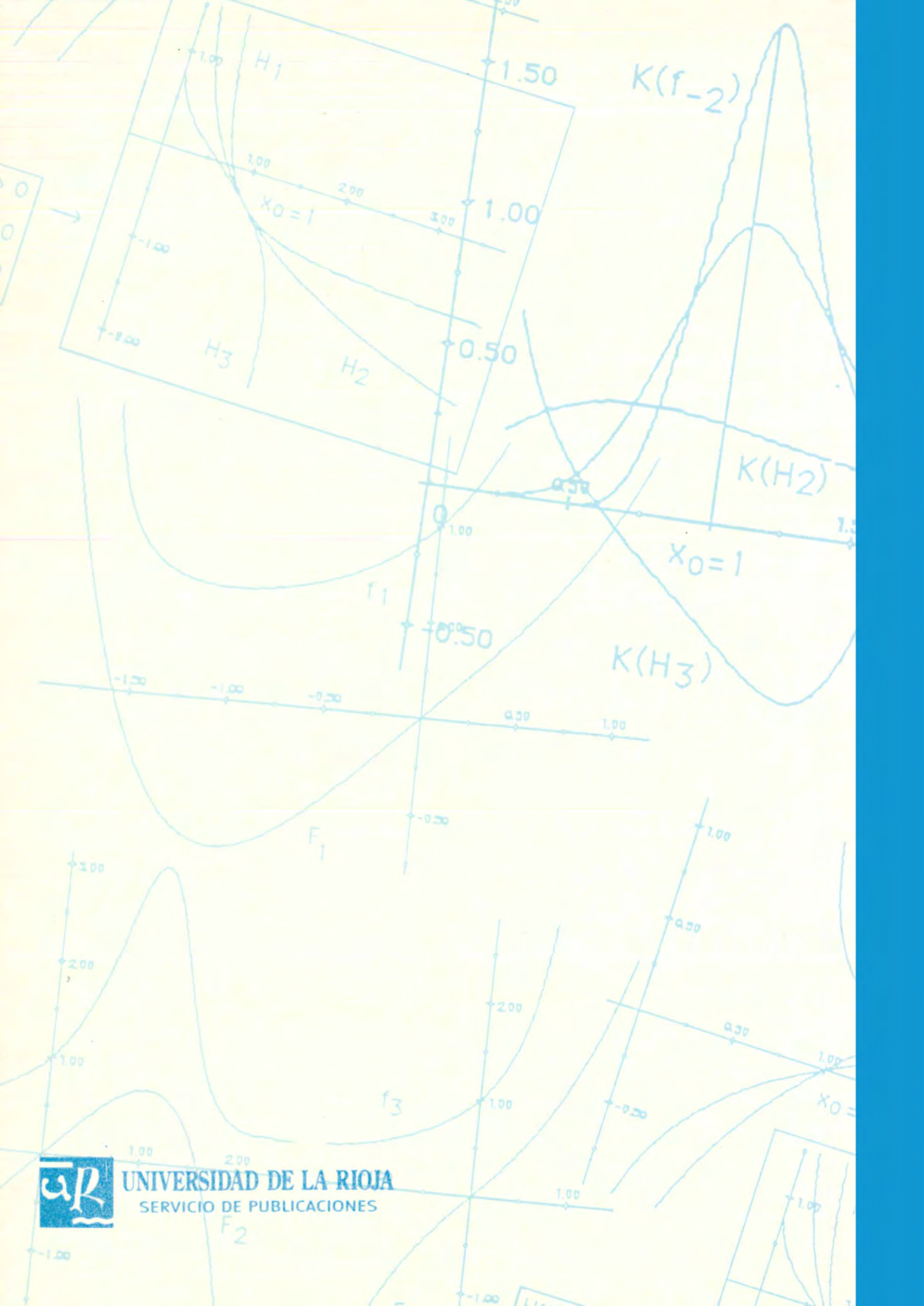
[18] RICE, J.R. (1983):
Numerical Methods, Software and Analysis.
Mac Graw Hill. Singapore.

[19] ROBERTS, A. W. & VARBERG, D. E. (1973):
Convex Functions.
Academic Press.New York.

[20] SPIVAK, M. (1975):
Calculus.
Reverté. Barcelona.

[21] STOER, J. Y BULIRSCH, R. (1980):
introduction to numerical analysis.
Springer-Verlag New York.

[22] TRAUB, J.F. (1964):
Iterative methods for the solution of equations.
Prentice Hall. Englewood Cliffs.


K(f_-2)
1.50
1.00
0.50
H1
H2
H3
x0 = 1
K(H2)
K(H3)
f1
F1
f3
F2
UNIVERSIDAD DE LA RIOJA
SERVICIO DE PUBLICACIONES